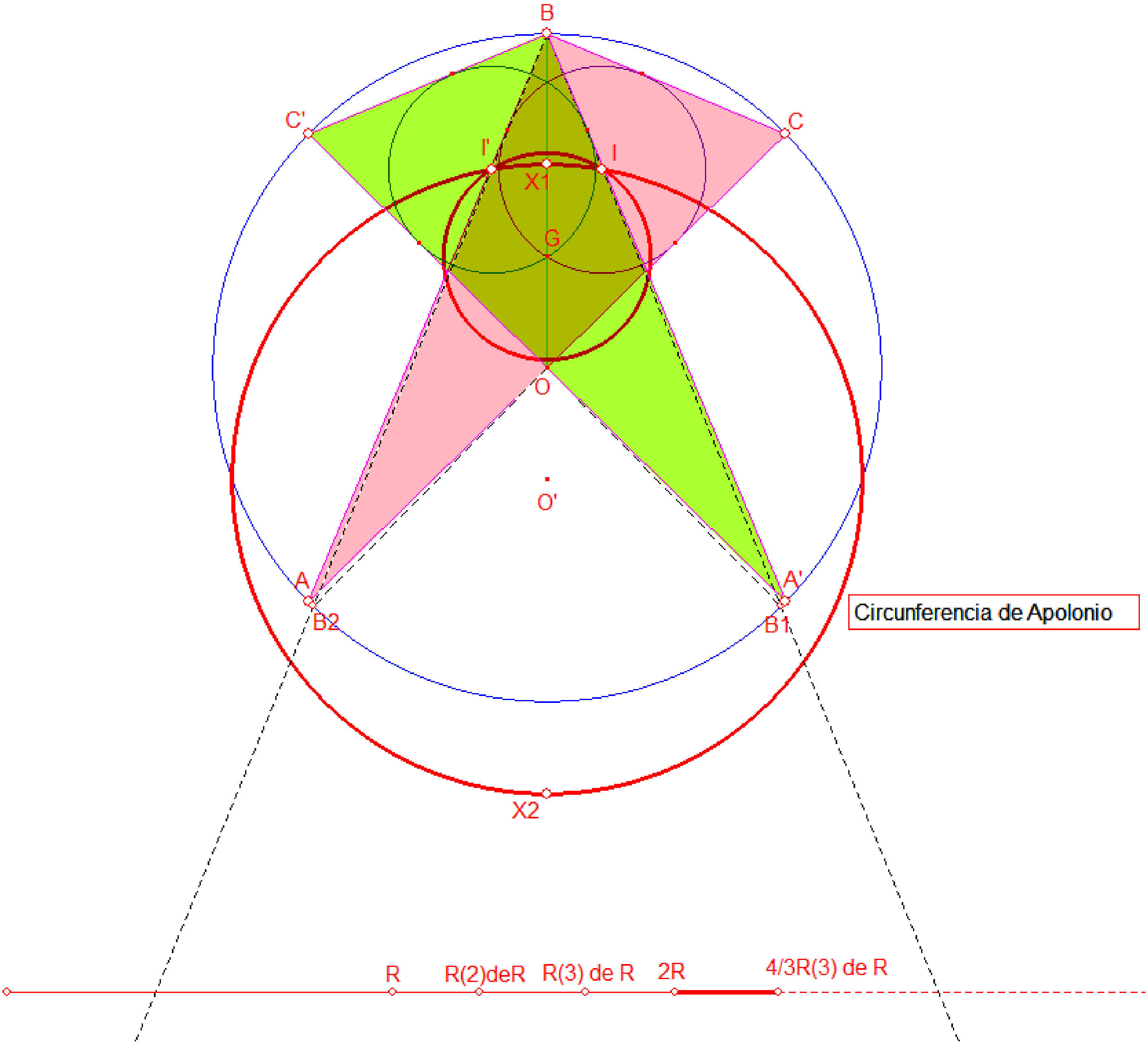
Propuesta del director.

Problema 683.

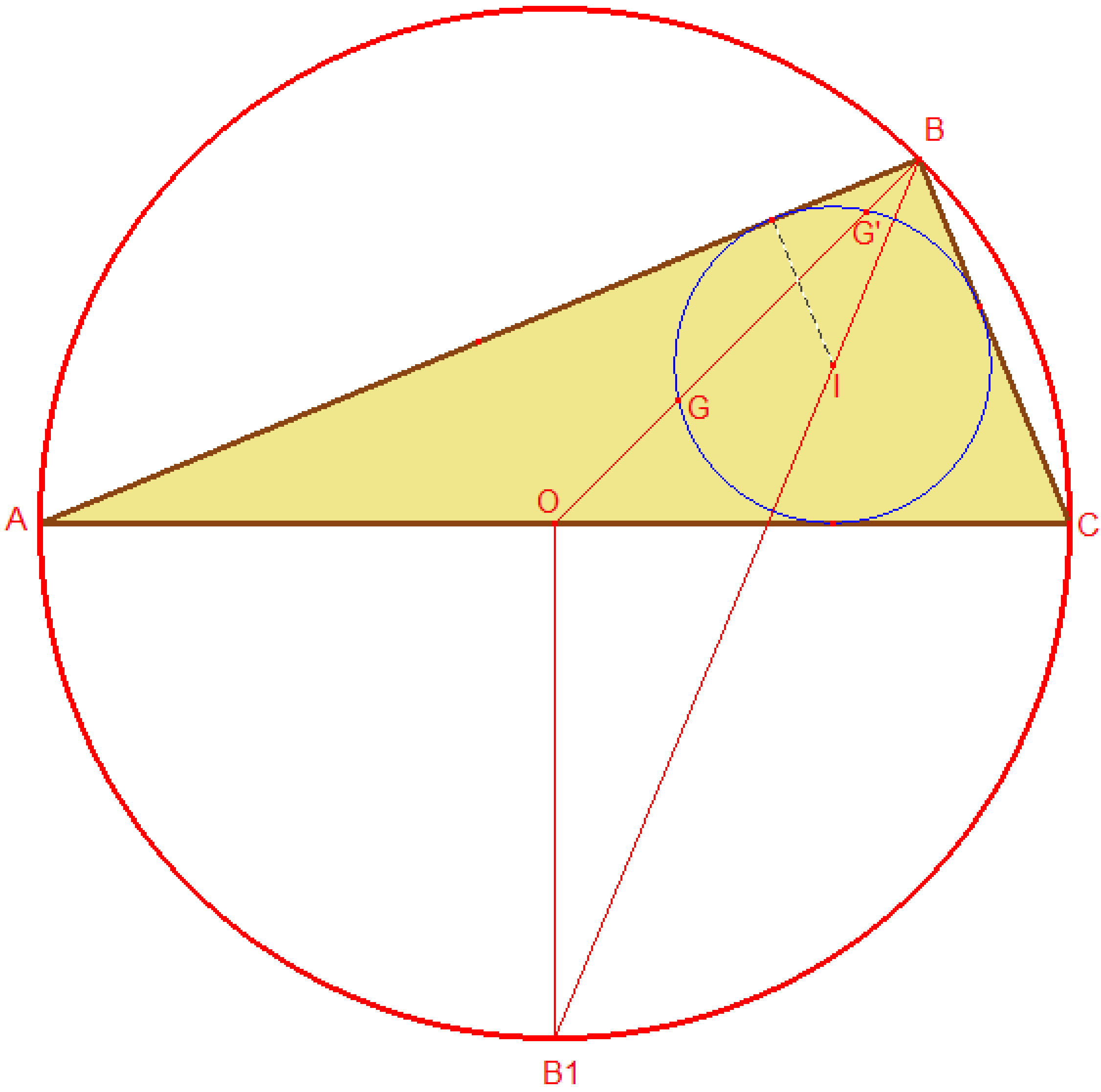
Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Sea dado el triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en B. Si nuestro triángulo verifica que su Baricentro, G, pertenece a la circunferencia inscrita, deberán verificarse los siguientes hechos:



1.- $\left.\begin{array}{l} BI=\sqrt{2}.r \\ GI=r \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{BI}{GI}=\sqrt{2}$. Por tanto, el Incentro, I, pertenecerá a la circunferencia de Apolonio, Lugar Geométrico de los puntos X del plano que verifican $\dfrac{BX}{GX}=\sqrt{2}(cte)$, de diámetro los puntos X_1X_2 siendo estos los puntos que sobre la recta BG verifican que $\dfrac{BX_1}{GX_1}=\dfrac{BX_2}{GX_2}=\sqrt{2}$.

2.- Por otro lado, $OG=\dfrac{1}{3}R$ y si llamamos G' al otro punto de intersección del segmento BG con la circunferencia inscrita, se verificará que $BG'.BG=r^2 \rightarrow BG'=\dfrac{r^2}{BG}=\dfrac{r^2}{\frac{2}{3}R}=\dfrac{3r^2}{2R}$

3.- Por la potencia del punto O respecto de la circunferencia inscrita resulta que $OG.OG'=OI^2-r^2$

4.- Según la relación de Euler tenemos que $OI^2=R^2-2Rr$

5.- Uniendo 3 y 4, obtenemos $OG'=\dfrac{R^2-2Rr-r^2}{OG}=\dfrac{R^2-2Rr-r^2}{\frac{1}{3}.R} \Rightarrow OG'=\dfrac{3R^2-6Rr-3r^2}{R}$

6.- Como OG'+BG'=R, tenemos que $R = OG' + BG' = \frac{3R^2 - 6Rr - 3r^2}{R} + \frac{3r^2}{2R} = \frac{6R^2 - 12Rr - 3r^2}{2R}$

Por tanto, se ha de verificar la relación: $4R^2 - 12Rr - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = (\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2)R$

Su Construcción:

En definitiva, para construir el triángulo dado, procederemos a seguir los siguientes pasos:

1.- Dibujamos una circunferencia de centro O y radio R.
2.- Situamos el punto G a una distancia del punto O igual a 1/3R.
3.- Determinamos los puntos X_1 y X_2 sobre la recta OG, de modo que se verifique la relación $\frac{BX}{GX} = \sqrt{2}$
4.- Construimos el LG de todos los puntos del plano que verifican $\frac{BX}{GX} = \sqrt{2}$, Circunferencia de Apolonio, de diámetro X_1X_2.
5.- Construimos a partir del segmento de longitud igual al radio R, el segmento de longitud $r = (\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2)R$
6.- Construimos la circunferencia de centro el punto G y radio r.
7.- Esta circunferencia cortará en dos puntos, I e I' (Incentro) a la Circunferencia de Apolonio, antes construida.
8.- Finalmente, desde el vértice B trazamos la semirrecta BI (BI') que interceptará a la circunferencia inicial en un punto B_1 (B_2).
9.- Unimos este punto B_1 (B_2) con el centro O y determinamos la perpendicular a este segmento por O, interceptando a la circunferencia dada en los vértices A y C (A' y C') del triángulo requerido.