

Propuesta del director.

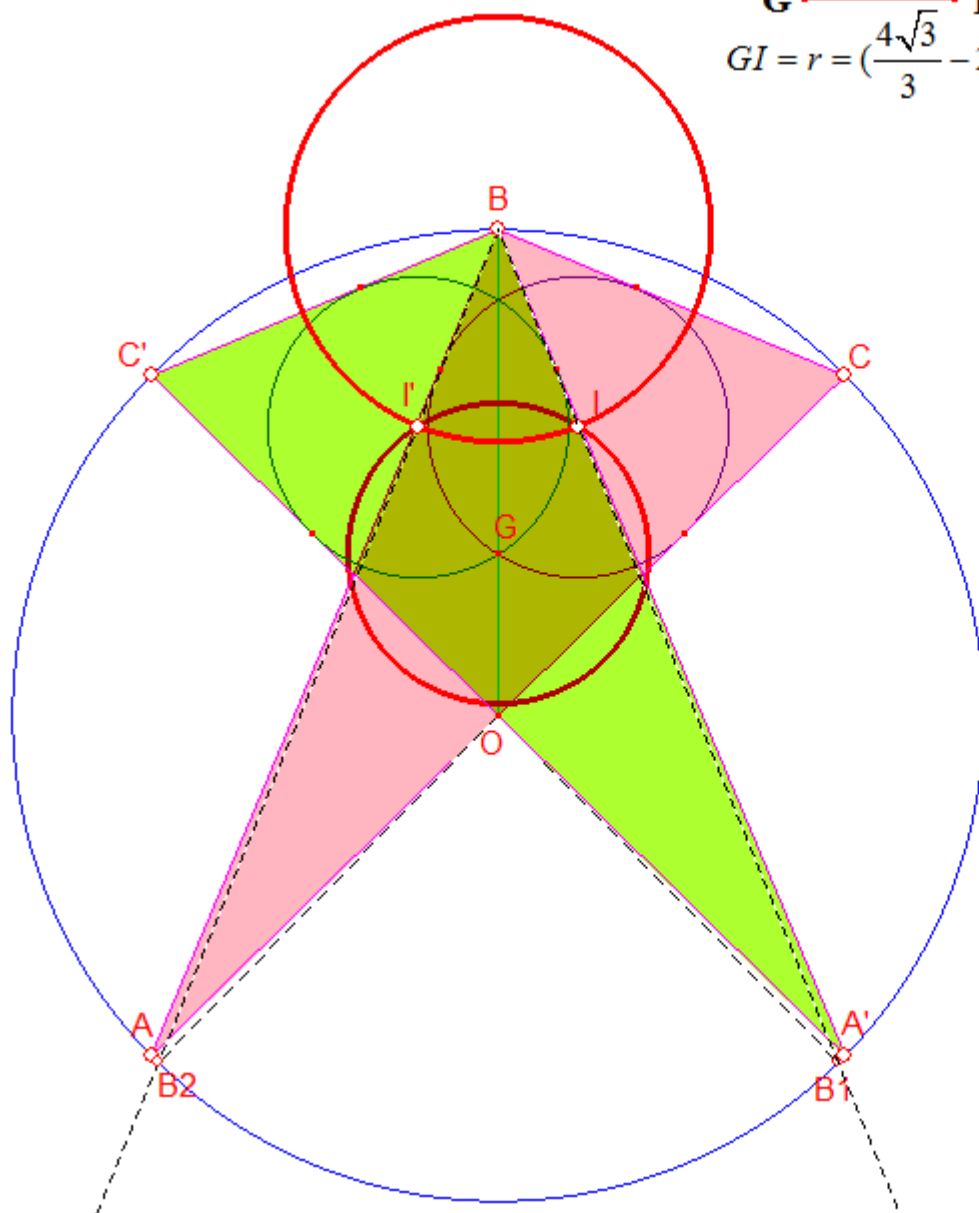
Problema 683.

Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.

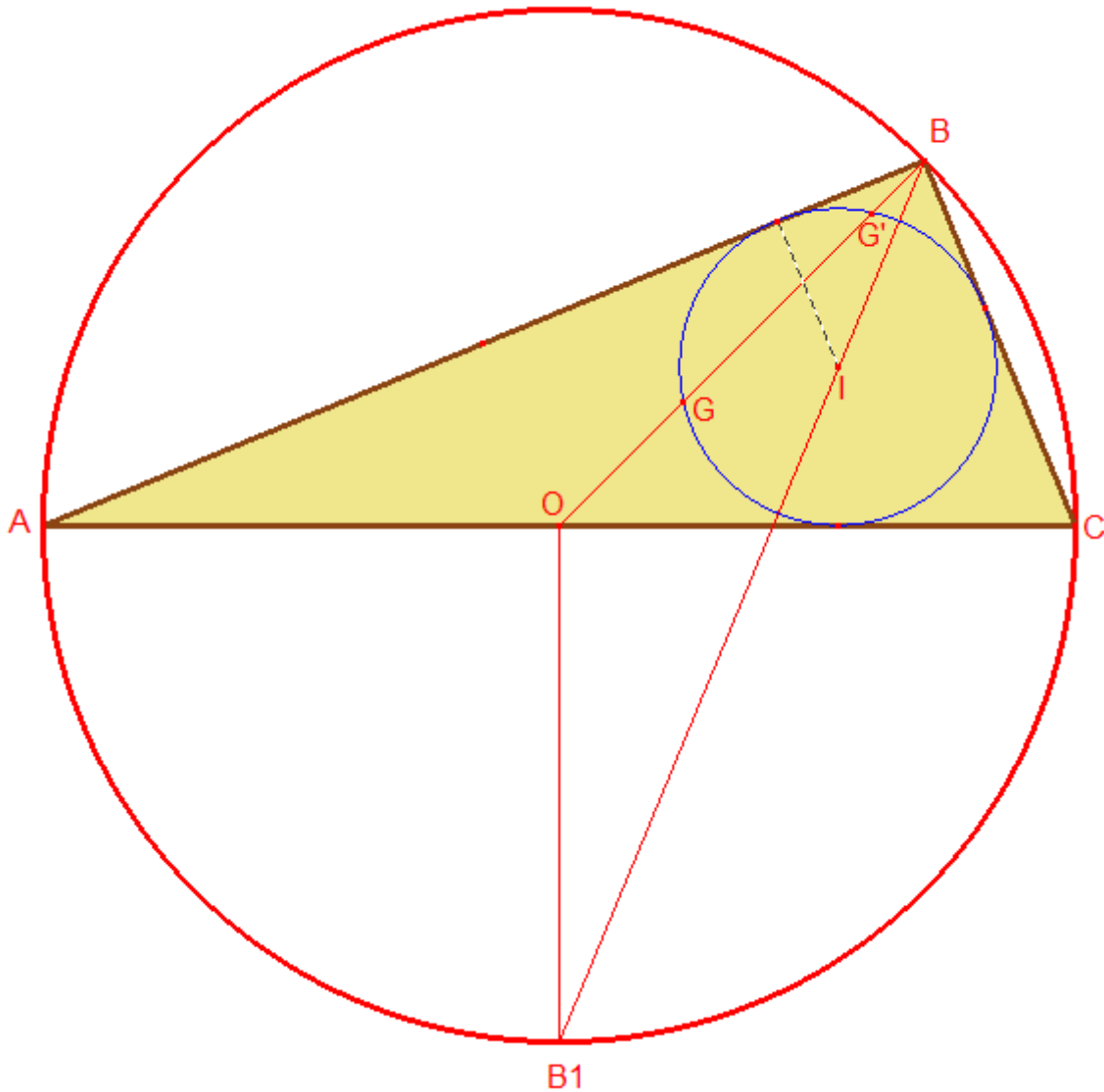
Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

$$\begin{array}{ll} \text{G} \cdots \text{I} & \text{B} \cdots \text{I} \\ GI = r = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right)R & BI = \sqrt{2}r \end{array}$$



Sea dado el triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en B. Si nuestro triángulo verifica que su Baricentro, G, pertenece a la circunferencia inscrita, deberán verificarse los siguientes hechos:



1.- Por un lado, $OG = \frac{1}{3}R$ y si llamamos G' al otro punto de intersección del segmento BG con la circunferencia

inscrita, se verificará que $BG' \cdot BG = r^2 \rightarrow BG' = \frac{r^2}{BG} = \frac{r^2}{\frac{2}{3}R} = \frac{3r^2}{2R}$

2.- Por la potencia del punto O respecto de la circunferencia inscrita resulta que $OG \cdot OG' = OI^2 - r^2$

3.- Según la relación de Euler tenemos que $OI^2 = R^2 - 2Rr$

4.- Uniendo 3 y 4, obtenemos $OG' = \frac{R^2 - 2Rr - r^2}{OG} = \frac{R^2 - 2Rr - r^2}{\frac{1}{3}R} \Rightarrow OG' = \frac{3R^2 - 6Rr - 3r^2}{R}$

5.- Como $OG' + BG' = R$, tenemos que $R = OG' + BG' = \frac{3R^2 - 6Rr - 3r^2}{R} + \frac{3r^2}{2R} = \frac{6R^2 - 12Rr - 3r^2}{2R}$

Por tanto, se ha de verificar la relación: $4R^2 - 12Rr - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right)R$

Su Construcción:

En definitiva, para construir el triángulo dado, procederemos a seguir los siguientes pasos:

- 1.- Dibujamos una circunferencia de centro O y radio R.
- 2.- Situamos el punto G a una distancia del punto O igual a $\frac{1}{3}R$.
- 3.- Construimos a partir del segmento de longitud igual al radio R, el segmento de longitud $GI = r = (\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2)R$ y el segmento $BI = \sqrt{2}.r$
- 4.- Construimos la circunferencia de centro el punto G y radio $r = GI$.
- 5.- Construimos la circunferencia de centro el punto B y radio $BI = \sqrt{2}.r$
- 6.- Estas dos circunferencias se cortarán en dos puntos, I e I' (Incentro).
- 7.- Finalmente, desde el vértice B trazamos la semirrecta BI (BI') que interceptará a la circunferencia inicial en un punto $B_1 (B_2)$.
- 8.- Unimos este punto $B_1 (B_2)$ con el centro O y determinamos la perpendicular a este segmento por O, interceptando a la circunferencia dada en los vértices A y C (A' y C') del triángulo requerido.