Problema 683 de *triánguloscabri*. *Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.*

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Solución de Francisco Javier García Capitán

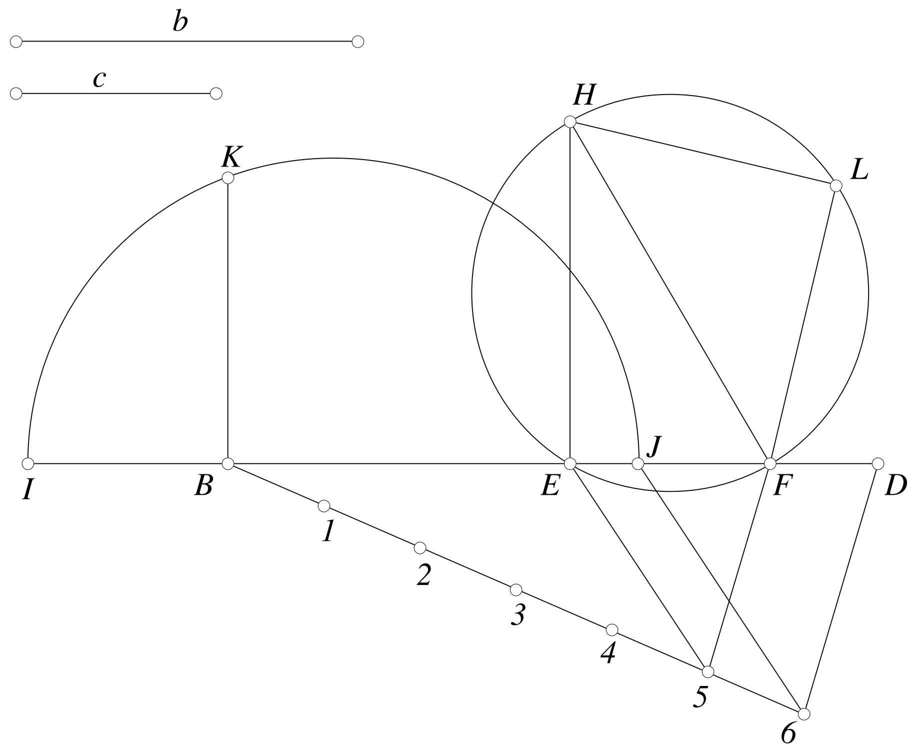
En esta solución no partiremos de cero, y a cambio ofreceremos una construcción general, no sólo para triángulos rectángulos.

En efecto, en el partado 6.1.1 de *Introduction to the Geometry of the Triangle*, de Paul Yiu, podemos ver que la circunferencia inscrita contiene al baricentro si $5(a^2+b^2+c^2)=6(ab+bc+ca)$.

Entonces, dados dos segmentos b y c debemos construir un segmento a que sea solución de la ecuación cuadrática

$$a^2-\frac{6}{5}(b+c)a+\left(b^2+c^2-\frac{6bc}{5}\right)=0.$$

Por tanto, basta usar los procedimientos usuales para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, haciendo para ello algunos otros cálculos intermedios.



Dados dos segmentos de longitudes b y c,

1. Situamos sobre una recta los puntos B, E, F tales que $BE=b$, $EF=c$, de modo que $BF=(b+c)$.

2. Prolongamos BF hasta D de manera que $BD=\frac{6}{5}(b+c)$.

3. Si por E levantamos una perpendicular $EH=b$, será $HF=\sqrt{b^2+c^2}$.

4. Ahora situamos sobre la misma recta BE los puntos I y J tales $IB = c$ y $BJ = \frac{6}{5}b$.

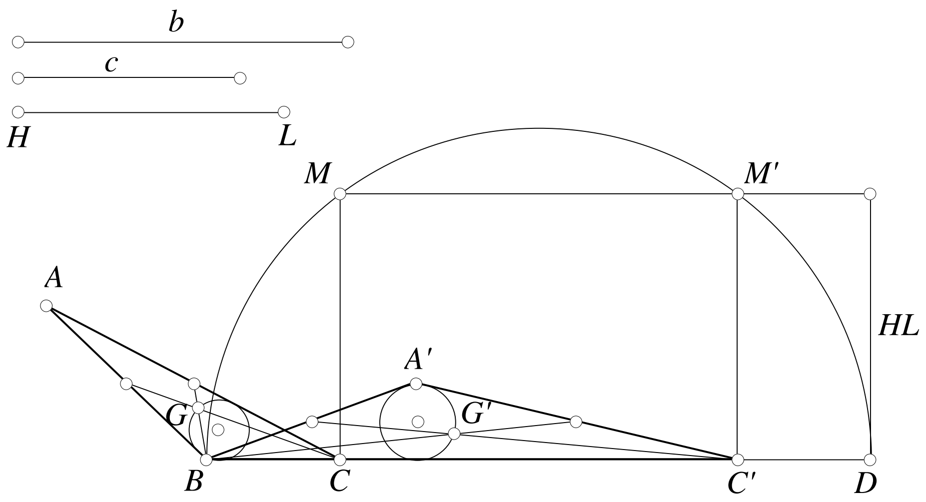
5. Trazamos una semircircunferencia con diámetro IJ y levantamos una perpendicular que la corta en el punto K, de manera que trendremos $BK^2 = IB \cdot BJ = \frac{6}{5}bc$.

6. Ahora, en la circunferencia con diámetro FH, señalamos el punto L tal que $FL = BK$.

7. Así tendremos

$$HL^2 = HF^2 - FL^2 = b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc.$$

Limpiamos un poco la figura, dejando esta distancia HL y el segmento $BD = \frac{6}{5}(b + c)$.



8. Por D levantamos una perpendicular a HL y a esa altura trazamos una paralela, que corta a la semicircunferencia con diámetro BD en dos puntos M, M'.

9. Las proyecciones de M, M' sobre la recta BD dand los puntos C, C', y los segmentos $a = BC$, $a =' BC'$ son las soluciones de nuestra ecuación cuadrática.

Observación. Teniendo en cuenta que el discriminante de la ecuación cuadrática es $-64(b^2 - 3bc + c^2)$, la construcción es válida si y solo si

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}c \leqslant b \leqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}c.$$

El triángulo obtenido será rectángulo en A si se cumplen a la vez las condiciones $a^2 = b^2 + c^2$ y $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$. Eliminando a de ambas se obtiene la relación necesaria entre b y c:

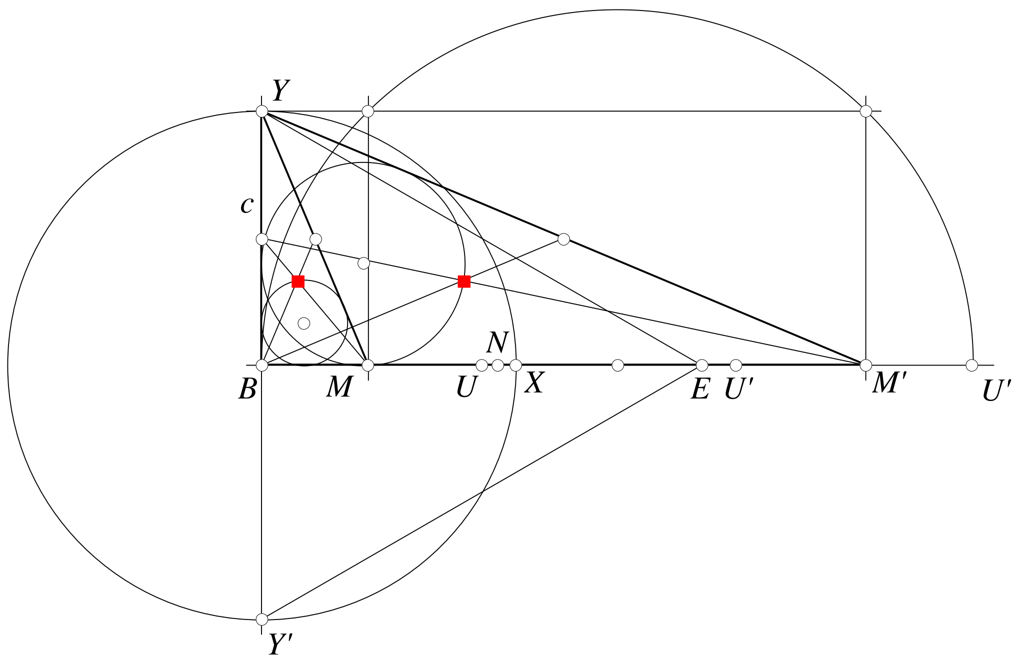
$$16b^4 - 48b^3c + 41b^2c^2 - 48bc^3 + 16c^4 = 0,$$

que puede expresarse

$$\left(4b^2 - (6+3\sqrt{3})bc + 4c^2\right)\left(4b^2 - (6-3\sqrt{3})bc + 4c^2\right) = 0.$$

Sólo el primer factor tiene raíces reales, por lo sólo nos queda hallar las soluciones de la ecuación cuadrática

$$4b^2 - (6+3\sqrt{3})bc + 4c^2 = 0 \Rightarrow b^2 - \frac{6+3\sqrt{3}}{4}bc + c^2 = 0.$$



Dado un segmento de longitud c, situamos sobre una recta un punto B y trazamos una circunferencia con centro B y radio c, que corta a la recta en el punto X y a su perpendicular en los puntos Y, Y'. Ahora construimos el triángulo equilátero YEY', el punto medio U de BE y el punto medio de N de UX. Sean U' el simétrico de B respecto de U y U'' el punto simétrico de U respecto de U'. Es fácil ver que

$$BU'' = \frac{6+3\sqrt{3}}{4}c.$$

Ahora la paralela por Y a BU'' a una circunferencia con diámetro BU'' en dos puntos cuyas proyecciones sobre esa recta son los puntos M y M' y se tendrá que $b = BM$ y $b' = BM'$ son las soluciones de nuestra ecuación cuadrática.