

Problema 683

Construïu un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ si se sap que el punt d'intersecció de les mitjanes es troba en la circumferència inscrita al triangle.

Solució Ricard Peiró:

Determinarem l'angle B.

Siga G el baricentre del triangle. Siga I l'incentre del triangle.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el catet $\overline{AB}$.

Siga O el circumcentre del triangle $\triangle ABC$ punt mig de la hipotenusa.

En un triangle rectangle la mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa.

$$\angle OAB = B.$$

$$\overline{AO} = \frac{1}{2}a. \text{ Per la propietat del baricentre:}$$

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AO} = \frac{1}{3}a.$$

$$\text{Per ser el triangle } \triangle ABC \text{ rectangle el radi de la circumferència inscrita és } r = \frac{b+c-a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ATI$:

$$\overline{AI} = r\sqrt{2}.$$

Per hipòtesi $\overline{IG} = r$.

$$\angle IAG = 45^\circ - B.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AGI$:

$$r^2 = (r\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2r\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \cos(45^\circ - B).$$

$$r^2 = 2r^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}ar \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B\right).$$

$$0 = r^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}ar\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right).$$

$$0 = r^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}r(b+c).$$

$$0 = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}\frac{b+c-a}{2}(b+c).$$

$$0 = \frac{a^2 + bc - ab - ac}{2} + \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}(a^2 + 2bc - ab - ac).$$

$$5a^2 = 3ab + 3bc + 3ac.$$

Dividint l'expressió per a^2 :

$$\frac{5}{3} = \sin B + \cos B + \sin B \cos B. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\sin B = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{13}{12}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}, \sin B = -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{13}{12}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}.$$

$$B \approx 22^\circ 024' \text{ o el complementari, } B \approx 67^\circ 1976'.$$

