Problema 683

Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita

Solución de Ricard Peiró:

Determinaremos el ángulo B.

Sea G el baricentro del triángulo. Sea I el incentro del triángulo.

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita y el cateto $\overline{AB}$.

Sea O el circuncentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ punto medio de la hipotenusa.

En un triángulo rectángulo la mediana sobre la hipotenusa mide la mitad de la hipotenusa.

$\angle OAB = B$.

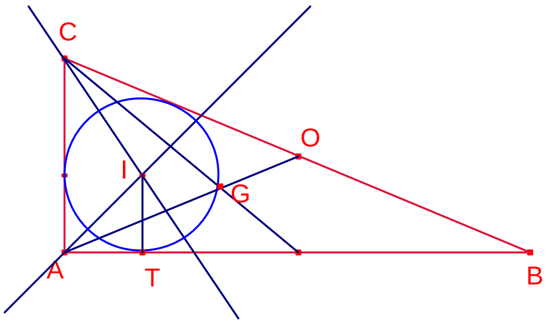
$\overline{AO} = \frac{1}{2}a$. Por la propiedad del baricentro:

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AO} = \frac{1}{3}a$.

Por ser el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es $r = \frac{b+c-a}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo e isósceles $\overset{\Delta}{ATI}$:

$\overline{AI} = r\sqrt{2}$.



Por hipótesis $\overline{IG} = r$.

$\angle IAG = 45º–B$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{AGI}$:

$$r^2 = \left(r\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2r\sqrt{2}\frac{1}{3}a \cdot \cos(45º–B).$$

$$r^2 = 2r^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}ar \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B\right).$$

$$0 = r^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}ar\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right).$$

$$0 = r^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}r(b+c).$$

$$0 = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}\frac{b+c-a}{2}(b+c).$$

$$0 = \frac{a^2 + bc - ab - ac}{2} + \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}\left(a^2 + 2bc - ab - ac\right).$$

$5a^2 = 3ab + 3bc + 3ac$.

Dividiendo la expresión por a^2:

$\frac{5}{3} = \sin B + \cos B + \sin B \cos B$. Resolviendo la ecuación:

$$\sin B = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{13}{12}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}, \quad \sin B = -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{13}{12}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}.$$

$B \approx 22'8024º$ o el complementario, $B \approx 67'1976º$.