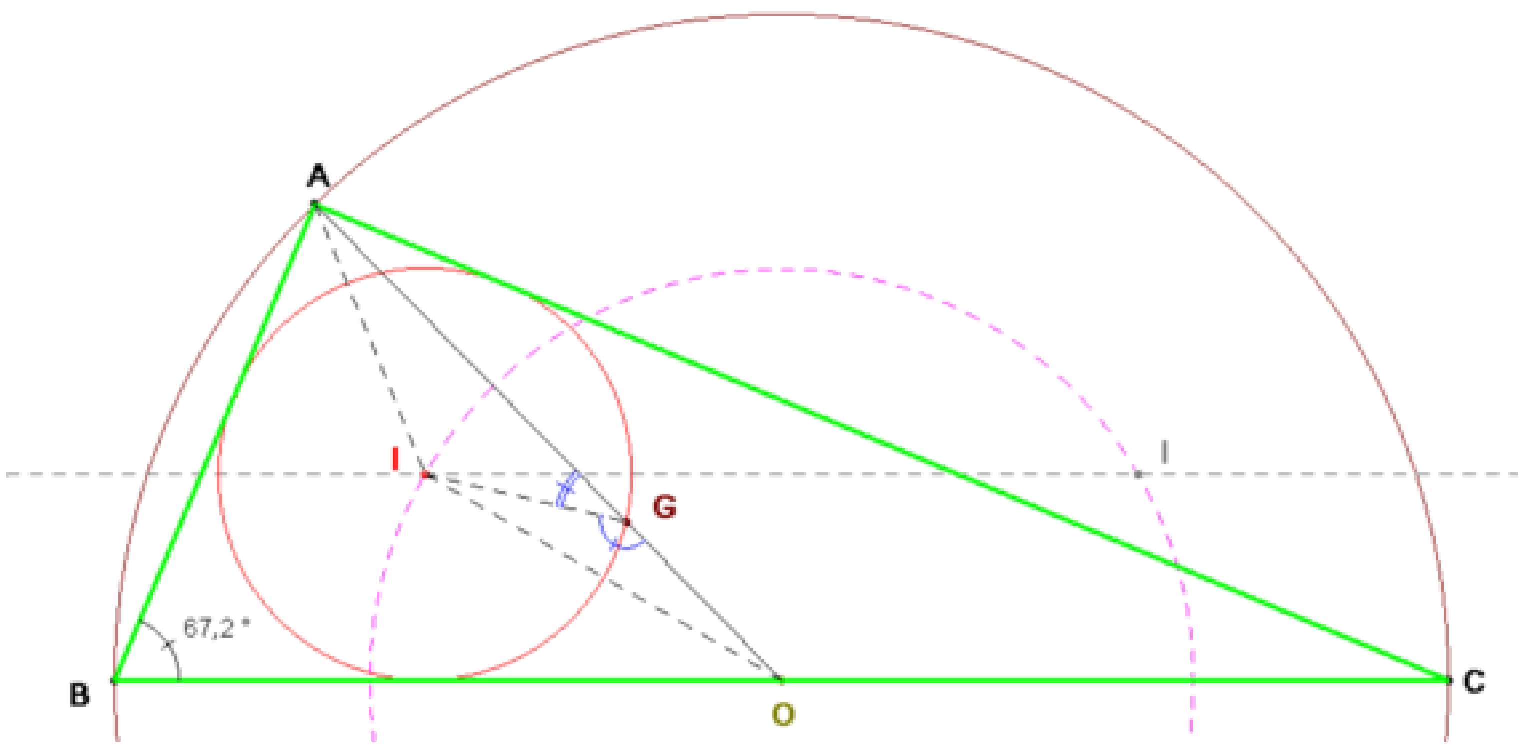
Propuesta del director.

***Problema** 683.- Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.*

Barroso, R. (2013): Comunicación personal

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Según el teorema de Euler, la distancia d entre el incentro y el circuncentro viene dada por la fórmula

$$d^2 = R^2 - 2rR.$$

Supongamos el problema resuelto. Observemos los dos triángulos que se forman con los puntos A, G, O, e I. La mediana OA es el radio R, siendo GO un tercio del mismo y GA los dos tercios restantes. El segmento AI mide $\sqrt{2}r$, pues es la bisectriz del ángulo recto, mientras que IG es el radio r.

Queremos encontrar una relación entre los dos radios r y R para poder hacer la construcción del triángulo. Nos fijamos en los dos ángulos que tienen su origen en G.

En el triángulo $\triangle AGI$, el coseno del ángulo en G es:

$$\cos\measuredangle AGI = \frac{GI^2 + GA^2 - AI^2}{2GI \cdot GA} = \frac{r^2 + \frac{4}{9}R^2 - 2r^2}{\frac{4}{3}rR} = \frac{4R^2 - 9r^2}{12rR}$$

En el triángulo $\triangle GIO$, para el suplementario, se tiene:

$$-\cos\measuredangle OGI = \frac{OI^2 - GI^2 - GO^2}{2GI \cdot GO} = \frac{d^2 - r^2 - \frac{1}{9}R^2}{\frac{2}{3}rR} = \frac{R^2 - 2rR - r^2 - \frac{1}{9}R^2}{\frac{2}{3}rR}$$
$$= \frac{8R^2 - 18rR - 9r^2}{6rR}$$

De la igualdad de estas expresiones resulta $4R^2 - 9r^2 = 2(8R^2 - 18rR - 9r^2)$, o bien,

$4R^2 - 12rR - 3r^2 = 0$

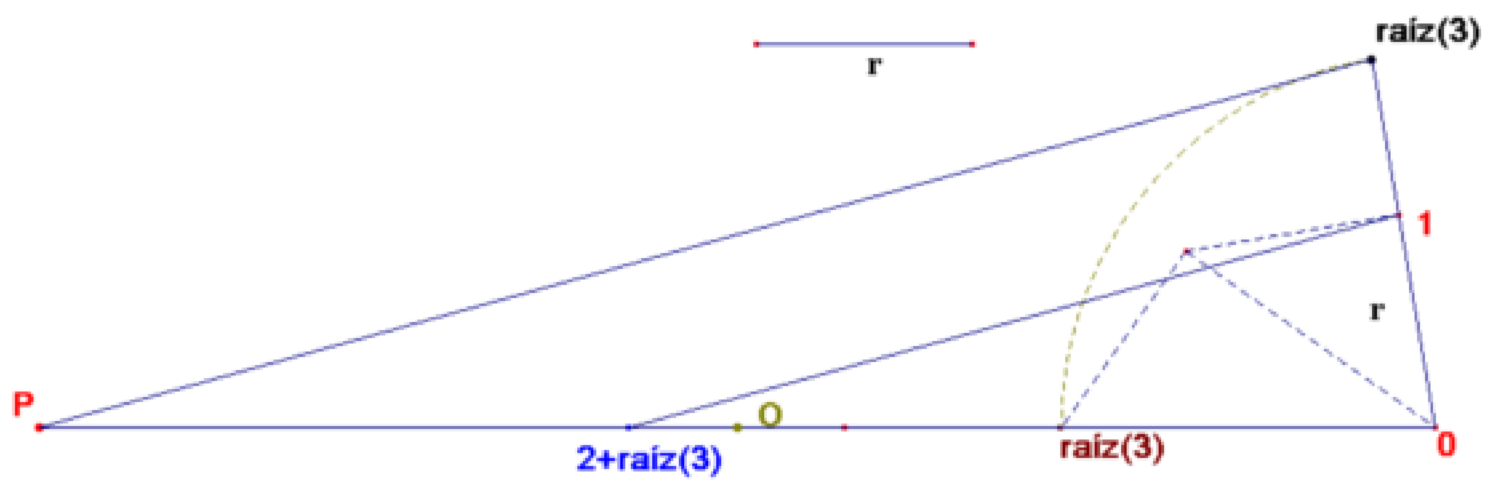
que nos permite relacionar los radios R y r.

Resolviendo la ecuación, $R = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}r$. Al tratarse de un triángulo rectángulo concluimos que la hipotenusa del mismo mide $(3 + 2\sqrt{3})r$.

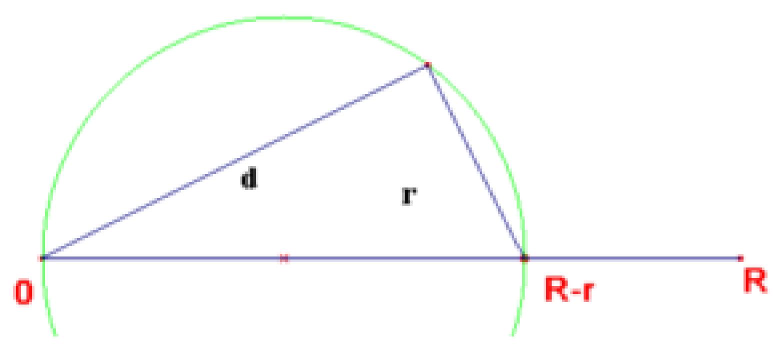
Construcción del triángulo

Expresado R en función de r (o a la inversa) tenemos la hipotenusa (el doble). Situamos a distancia r, una paralela a la misma. Después elegimos I en la intersección con la circunferencia de centro O y radio d: hay dos puntos I que se corresponden a dos soluciones simétricas respecto de la mediatriz de la hipotenusa. Fijada la circunferencia inscrita, la otra tangente desde B a ésta, nos da el vértice A y se completa la construcción.

Tomamos r como unidad y observando que $3 + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot(\sqrt{3} + 2)$, construimos la hipotenusa gracias al teorema de Thales como se indica en la figura: $OP = 3 + 2\sqrt{3}$.



Para construir d, nos basamos en que $d^2 = (R - r)^2 - r^2$. La última figura muestra cómo construir este segmento.



■