Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 684.-

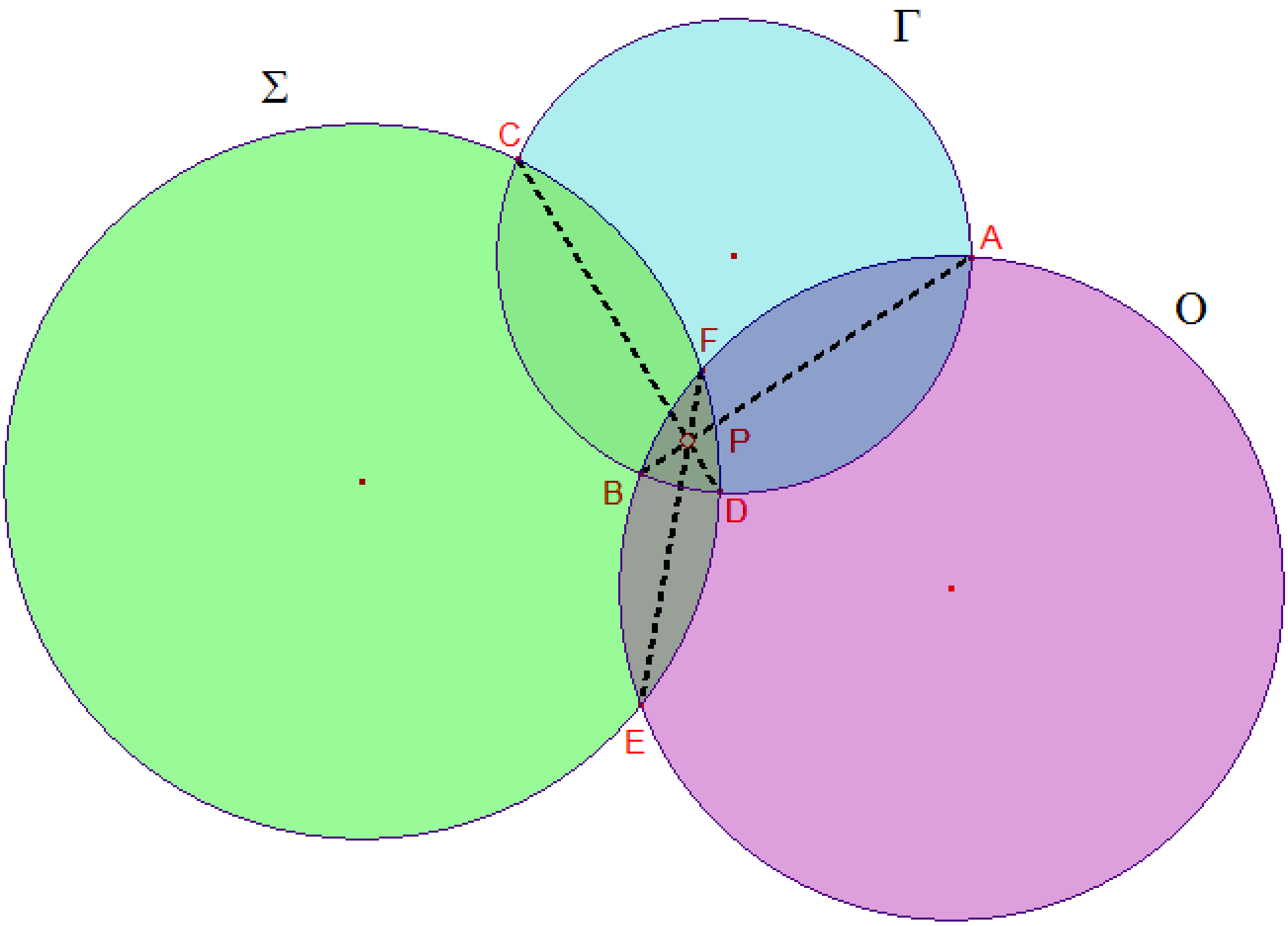
TEOREMA DE HARUKI (Llamado también por algunos como el **Teorema de Mickey Mouse**)
Dadas tres circunferencias Σ, Γ y O, cada una se interseca con las otras así:
O y Γ en A exterior a Σ , y B interior a Σ
Σ y Γ en C exterior a O , y D interior a O
O y Σ en E exterior a Γ , y F interior a Γ
Así se forman tres triángulos ADF, EBD y CBF.
Demostrar que AD EB CF = AF ED CB

Honsberger, R. "Haruki's Cevian Theorem for Circles." §12.4 in
Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 144-146, 1995.
Obtenido de http://mathworld.wolfram.com/HarukisTheorem.html

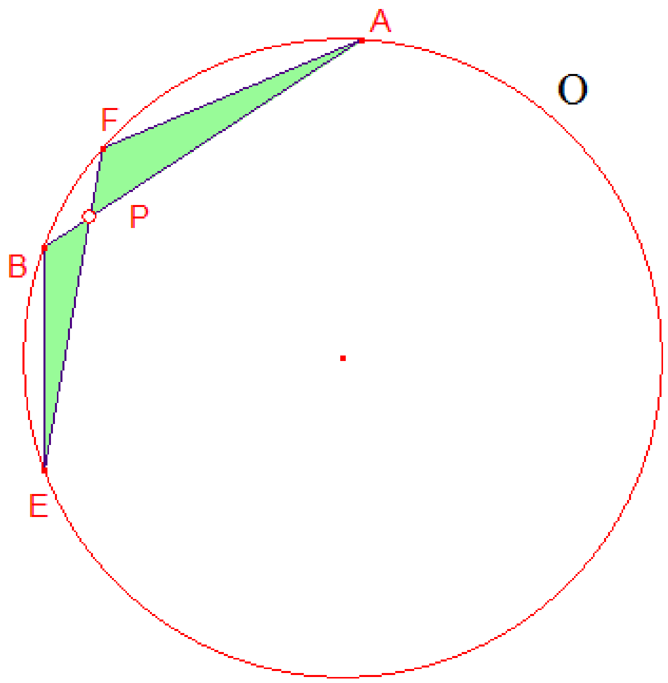
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sean dadas las tres circunferencias y marcados los puntos A, B, C, D, E y F como se indica en el enunciado.

Consideramos el centro radical de las tres circunferencias, punto P, que pertenecerá, por tanto, a los ejes radicales AB, CD y EF, de cada par de aquellas circunferencias dadas.

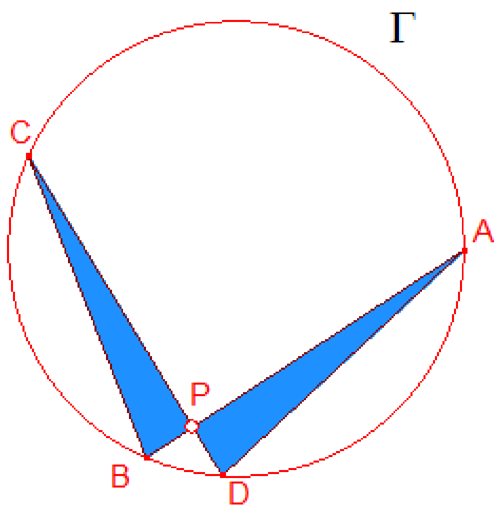


Consideramos por separado cada una de las circunferencias dadas:



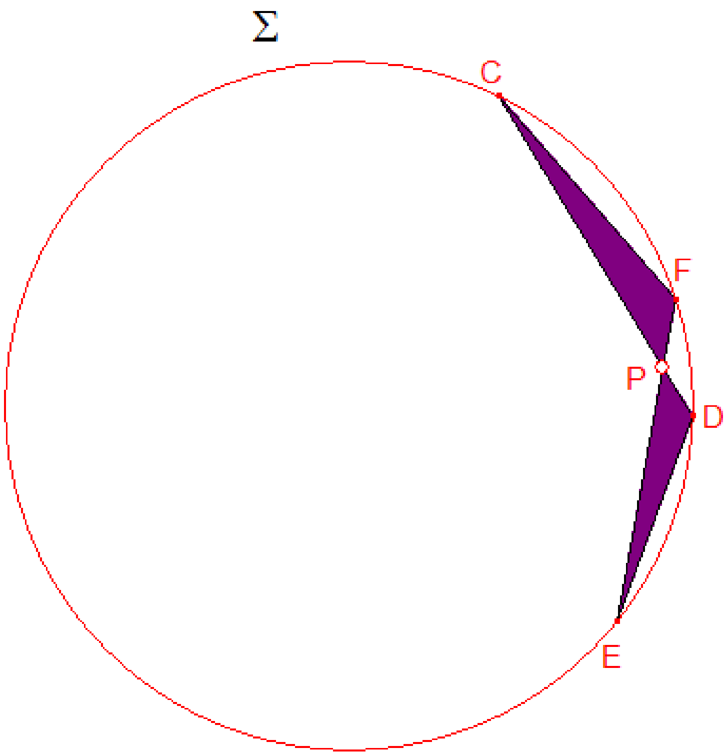
Sea la circunferencia O y en ella consideramos los triángulos semejantes AFP y EBP como se puede fácilmente justificar.
Por tanto, se verificarán las siguientes igualdades:

$$\frac{AF}{BE}=\frac{FP}{BP}=\frac{AP}{EP} \quad (I)$$



Sea la circunferencia Γ y en ella consideramos los triángulos semejantes ADP y CBP como se puede fácilmente justificar.
Por tanto, se verificarán las siguientes igualdades:

$$\frac{AD}{BC}=\frac{DP}{BP}=\frac{AP}{CP} \quad (II)$$



Sea la circunferencia Σ y en ella consideramos los triángulos semejantes EDP y CFP como se puede fácilmente justificar.
Por tanto, se verificarán las siguientes igualdades:

$$\frac{ED}{CF}=\frac{DP}{FP}=\frac{EP}{CP} \quad (III)$$

En definitiva, usando adecuadamente las igualdades (I), (II) y (III), obtenemos que:

$$\frac{AF}{BE}=\frac{FP}{BP}=\frac{AP}{EP}\quad (I) \qquad \frac{AD}{BC}=\frac{DP}{BP}=\frac{AP}{CP}\quad (II) \qquad \frac{ED}{CF}=\frac{DP}{FP}=\frac{EP}{CP}\quad (III)$$

$$\frac{AF}{BE}.\frac{BC}{AD}.\frac{ED}{CF}=\frac{FP}{BP}.\frac{BP}{DP}.\frac{DP}{FP}=1$$

o también:

$$\frac{AF}{BE}.\frac{BC}{AD}.\frac{ED}{CF}=\frac{AP}{EP}.\frac{CP}{AP}.\frac{EP}{CP}=1$$

Por tanto, se tiene que: AD. EB. CF = AF. ED. CB **c. q. d.**