

Problema 684.-

TEOREMA DE HARUKI (Llamado tambien por algunos como el Teorema de Micky Mouse)

Dadas tres circunferencias, Σ , Γ y Ω , cada una se interseca con las otras así:

Ω y Γ en A exterior a Σ , y B interior a Σ

Σ y Γ en C exterior a Ω , y D interior a Ω

Ω y Σ en E exterior a Γ , y F interior a Γ

Así se forman tres triángulos ADF, EBD y CBF.

Demostrar que $AD \cdot EB \cdot CF = AF \cdot ED \cdot CB$

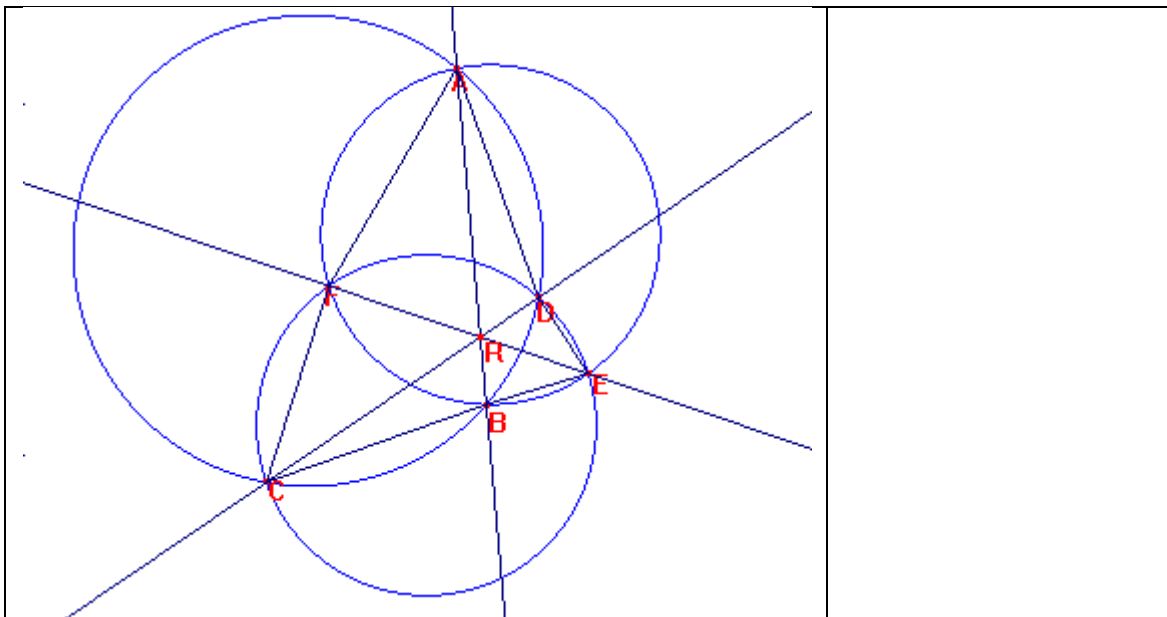
Honsberger, R. "Haruki's Cevian Theorem for Circles." §12.4 in Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 144-146, 1995.

Obtenido de: <http://mathworld.wolfram.com/HarukisTheorem.html>

Solución del director

Las tres circunferencias tienen un centro radical que dado que se intersecan será el punto de intersección de las tres cuerdas que constituyen entre ellas.

Sea R el centro radical.



Tenemos $ER \cdot RF = CR \cdot RD = AR \cdot RB$.

Por semejanza de triángulos tenemos las siguientes relaciones:

ARF y ERB

$$AF/EB = AR/ER = FR/RB$$

CRF y ERD

$$ED/CF = ER/CR = RD/RF$$

ARD y CRB

$$CB/AD = CR/AR = RB/RD.$$

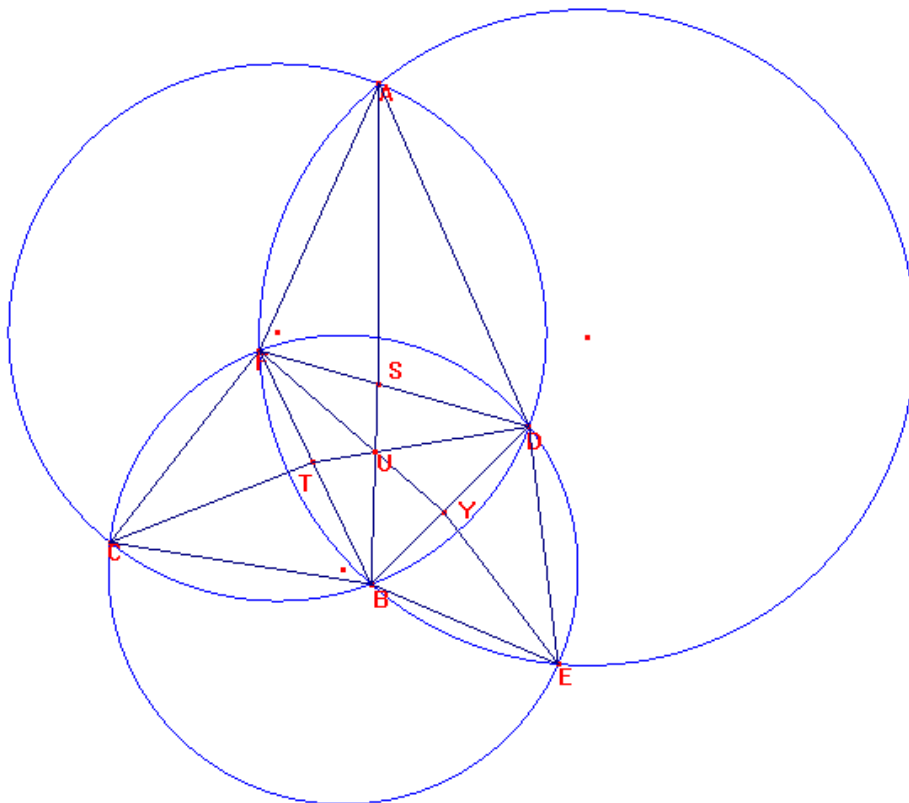
Así tenemos

$$(AF/EB)^2 (ED/CF)^2 (CB/AD)^2 = (AR/ER)(FR/RB)(ER/CR)(RD/RF)(CR/AR)(RB/RD) = 1$$

Y así cqd, $AF \cdot DE \cdot CB = EB \cdot CF \cdot AD$.

Nota 1.-

Estudiando la configuración del problema, tomamos los pies de las bisectrices



De FAD, en FD, S, de BED en BD, Y, y de BCF, T en BF, las cevianas FY, DT y BS se cortan en un punto U interior al triángulo BDF.

El motivo es debido a las propiedades de las bisectrices:

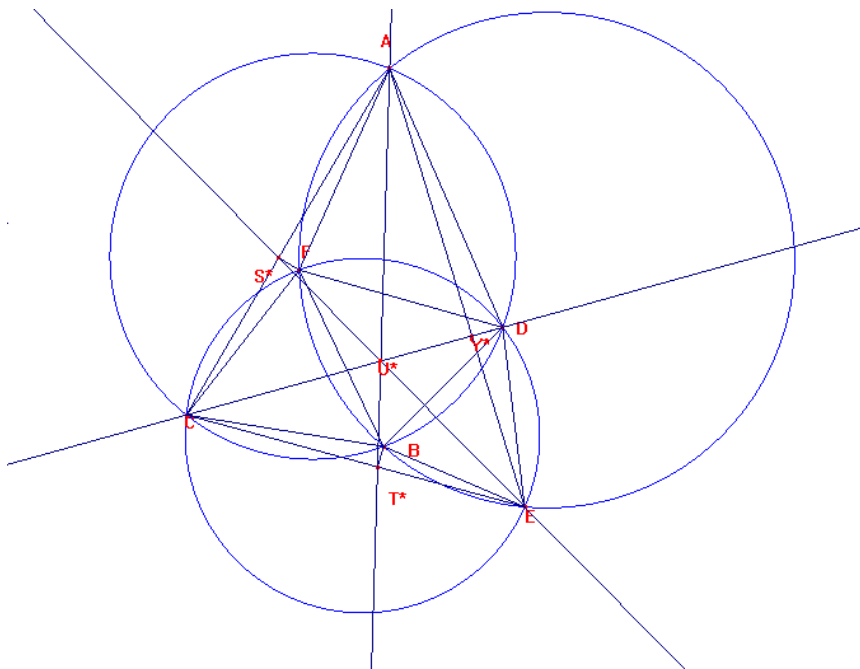
$$AF/AD = FS/SD ; EB/ED = BY/YD ; CB/CF = BT/TF$$

$$\text{Así, } (FS \cdot DY \cdot BT) / (SD \cdot BY \cdot TF) = (AF \cdot ED \cdot CB) / (AD \cdot EB \cdot CF) = 1$$

Luego las cevianas se cortan en U.

Nota 2.-

Tomamos ahora los pies de las bisectrices de ADE, en AE, Y*, de EBC, sobre EC, T*, y de CFA sobre CA, S*.

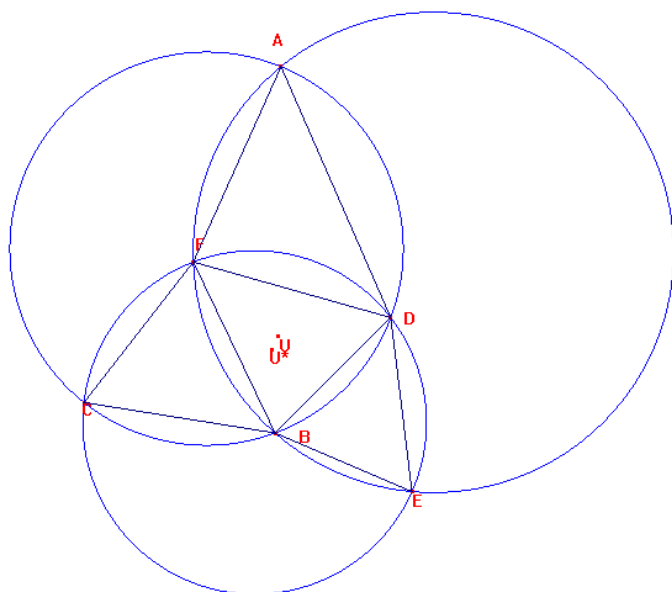


$$AD/DE = AY^*/EY^* ; EB/BC = ET^*/CT^* , CF/FA = CS^*/AS^*$$

De donde:

$$(AY^* \cdot ET^* \cdot CS^*) / (EY^* \cdot CT^* \cdot AS^*) = (AD \cdot EB \cdot CF) / (DE \cdot EB \cdot FA) = 1.$$

Así se cortan en un punto U* interior al triángulo ACE.



Los puntos U y U* estudiados.

Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla.