Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 684.-

TEOREMA DE HARUKI (Llamado también por algunos como el **Teorema de Micky Mouse**)

Dadas tres circunferencias, Σ , Γ y Ω, cada una se interseca con las otras así:

Ω y Γ en A exterior a Σ , y B interior a Σ

Σ y Γ en C exterior a Ω , y D interior a Ω

Ω y Σ en E exterior a Γ , y F interior a Γ

Así se forman tres triángulos ADF, EBD y CBF.

Demostrar que AD EB CF = AF ED CB

Honsberger, R. "Haruki's Cevian Theorem for Circles." §12.4 in *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 144-146, 1995. Obtenido de: http://mathworld.wolfram.com/HarukisTheorem.html

Solución de Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

En la figura 1 se muestra las tres circunferencias y los respectivos puntos de intersección.

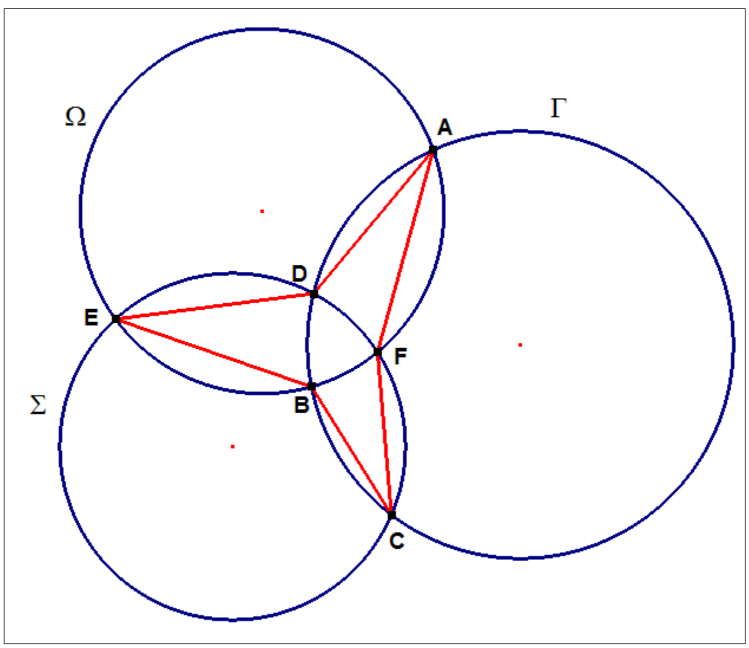

Figura 1

Sea G el centro radical de las tres circunferencias; esto es, G es el punto de concurrencia de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ (figura 2). Como las circunferencias se cortan dos a dos, el punto G se encuentra en el interior de cada una de ellas.

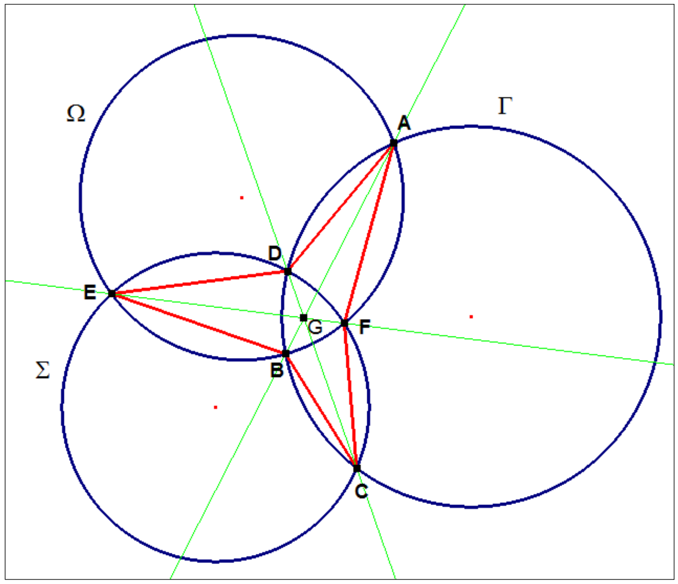

Figura 2

Consideremos la circunferencia Ω y los cuatro puntos que pertenecen a ella; a saber, A, F, B y E. Tracemos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{FE}$. Estos segmentos se intersecan en el punto G (centro radical) como se muestra en la figura 3. Nótese que:

- los ángulos <FAB y <FEB están inscritos en el mismo arco. En consecuencia, estos ángulos son congruentes.

- los ángulos <AFE y <ABE están inscritos en el mismo arco. Por tanto, son congruentes.

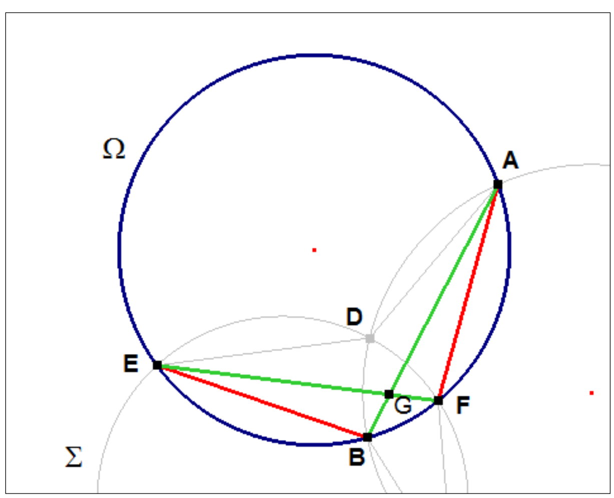

Figura 3

Por criterio de semejanza AA (ángulo-ángulo), podemos afirmar que los triángulos AFG y EBG son semejantes. Así, $\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{AG}}$. De donde:

$$\mathrm{EB} = \frac{\mathrm{AF}\,.\mathrm{EG}}{\mathrm{AG}} \qquad (1)$$

Consideremos, ahora, la circunferencia Γ y sus cuatro puntos A, D, B y C. Tracemos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. El centro radical G es el punto de intersección de estos segmentos (figura 4). Nótese que:

- los ángulos <DAB y <DCB están inscritos en el mismo arco. En consecuencia, estos ángulos son congruentes.
- los ángulos <ADC y <ABC están inscritos en el mismo arco. Por tanto, son congruentes

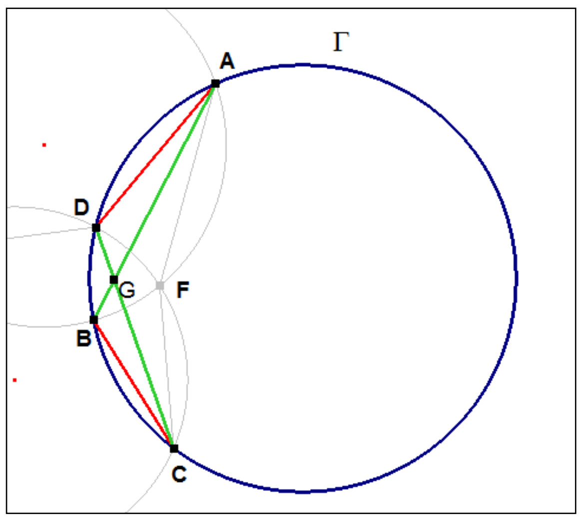

Figura 4

Por criterio de semejanza AA (ángulo-ángulo), podemos afirmar que los triángulos ADG y CBG son semejantes. Así, $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{CG}}$. De donde:

$$\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{CB}\,.\mathrm{AG}}{\mathrm{CG}} \qquad (2)$$

Si razonamos de manera análoga en la circunferencia Σ, obtendremos que los triángulos EDG y CFG son semejantes y encontraremos que:

$$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{ED}\,.\mathrm{CG}}{\mathrm{EG}} \qquad (3)$$

A continuación, evaluaremos el producto AD . EB . CF.

AD. EB . CF = $\frac{CB\,.AG}{CG}$. $\frac{AF\,.EG}{AG}$. $\frac{ED\,.CG}{EG}$ sustituyendo por las expresiones (2), (1) y (3)

Al simplificar el miembro derecho, resulta que AD. EB . CF = CB . AF . ED **QED**