

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú
 Problema 684.-

TEOREMA DE HARUKI (Llamado también por algunos como el Teorema de Micky Mouse)

Dadas tres circunferencias, Σ , Γ y Ω , cada una se interseca con las otras así:

Ω y Γ en A exterior a Σ , y B interior a Σ

Σ y Γ en C exterior a Ω , y D interior a Ω

Ω y Σ en E exterior a Γ , y F interior a Γ

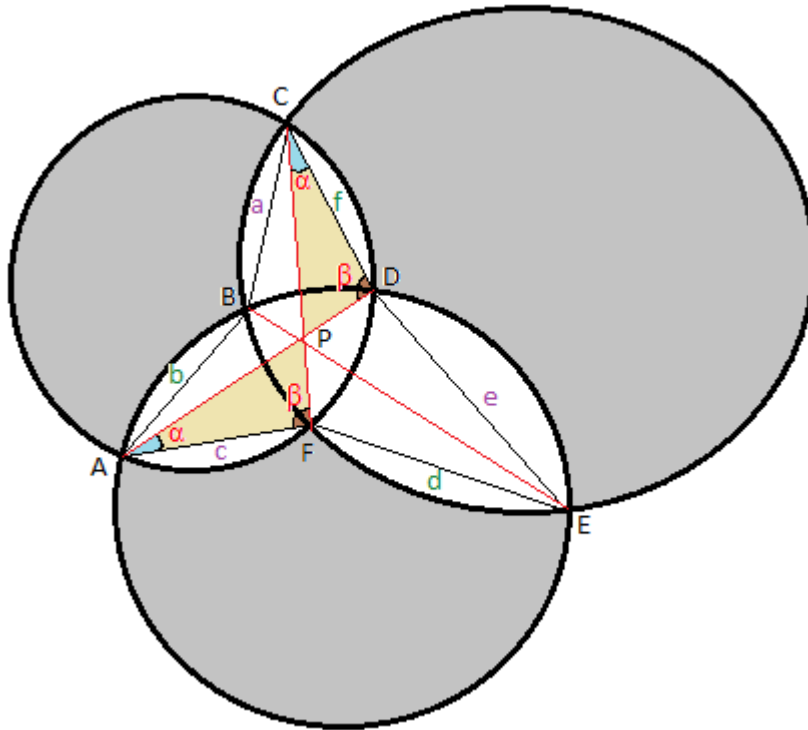
Así se forman tres triángulos ADF, EBD y CBF.

Demostrar que $AD \cdot EB \cdot CF = AF \cdot ED \cdot CB$

Honsberger, R. "Haruki's Cevian Theorem for Circles." §12.4 in Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 144-146, 1995.

Obtenido de: <http://mathworld.wolfram.com/HarukisTheorem.html>

Solución de Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú.



Unamos A con D, C con F y E con B. Se puede notar que los segmentos AD, CF y EB concurren en el punto P

Se observa además que: $m\angle DAF = m\angle FCD = \alpha$, asimismo $m\angle CDA = m\angle CFA = \beta$ por lo tanto

$\triangle CDP \sim \triangle AFP$ luego: $c / f = AP / CP$ (1)

Análogamente:

$\triangle CBP \sim \triangle EFP$ luego: $a / d = CP / EP$ (2)

$\triangle ABP \sim \triangle EDP$ luego: $e / b = EP / AP$ (3)

Multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (1), (2) y (3) tendremos:

Resolviendo esta expresión trigonométrica:

$(c/f)(a/d)(e/b) = (AP/CP)(CP/EP)(EP/AP)$

Finalmente se demuestra que :

$$\frac{ace}{bdf} = 1 \quad \text{l.q.q.d}$$