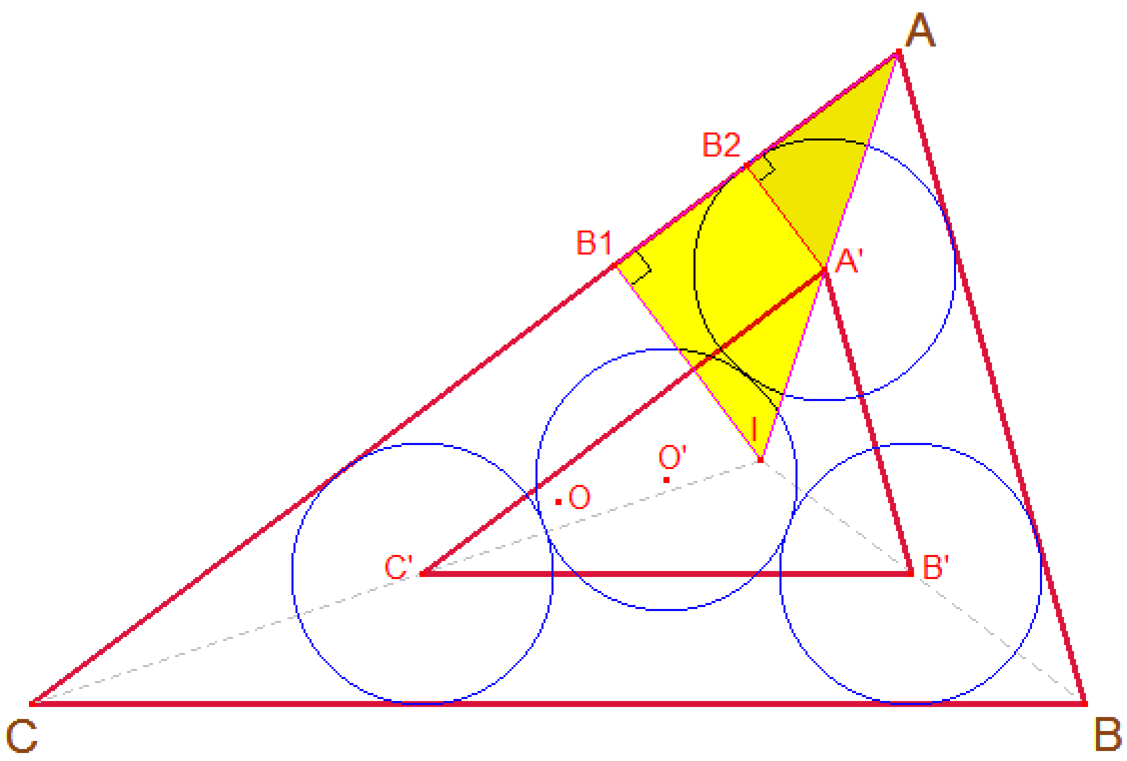
Problema 685.-
Te dan un triángulo ABC. Construir cuatro circunferencias k, k1, k2 y k3, de modo que sea verdadero:
1.- Las circunferencias k1, k2 y k3 forman parte del triángulo ABC, siendo tangentes a los ángulos α, ß y γ.
2.- La circunferencia k es tangente exterior a las otras tres, teniendo todas ellas el mismo radio.

Kuřina, F (1989) Arte de ver matemática. Statni pedagogiké nakladatelstvi. Praha. (p. 192)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sean dadas las cuatro circunferencias, todas ellas de igual radio, y que han de guardar la posición fijada en el enunciado del problema. Para que esto suceda, ha de pasar que los centros A', B' y C' de las circunferencias K1, K2 y K3 deben estar sobre cada una de las bisectrices del triángulo ABC.
Como además las circunferencias K1, K2 y K3 tienen iguales radios r_k, resultará que ambos triángulos ABC y A'B'C' serán semejantes. De este hecho se infiere que, ambos triángulos comparten el mismo Incentro I, siendo además este punto, el centro de semejanza de dichos triángulos.



La razón de semejanza H será $H=\frac{IA}{IA'}=\frac{IB_1}{A'B_2}=\frac{r}{r-r_k}$, siendo r y r_k los respectivos radios de la circunferencia inscrita y de las restantes circunferencias K1, K2, K3 y K.
Si llamamos O y O' a los respectivos circuncentros de los triángulos ABC y A'B'C', se tendrá que

$$H=\frac{IO}{IO'}=\frac{r}{r-r_k}$$

Ahora bien, tenemos en el triángulo ABC, que $IO^2=R^2-2Rr$ y en el triángulo A'B'C',

$$IO'^2=\overline{O'A'}^2-2\overline{O'A'}.(r-r_k)$$

Como $\overline{O'A'}=2.r_k$, entonces $IO'^2=4r_k{}^2-4r_k.(r-r_k)=8r_k{}^2-4r_kr$.

Por tanto $\dfrac{IO^2}{IO'^2}=\dfrac{R^2-2Rr}{8r_k{}^2-4r_kr}=\dfrac{r^2}{(r-r_k)^2}\Rightarrow\left(R^2-2Rr\right)\left(r-r_k\right)^2-r^2\left(8r_k{}^2-4r_kr\right)=0$

Simplificando, obtenemos la ecuación

$\left(8r^2+2Rr-R^2\right)r_k{}^2+\left(2rR^2-4r^3-4r^2R\right)r_k+2r^3R-r^2R^2=0$, cuyas soluciones son:

$$r_k=\frac{Rr}{2r+R}\quad y\quad r_k=\frac{2r^2-Rr}{4r-R}$$

De ambas soluciones, consideramos únicamente la primera de ellas, para que así se verifique que las circunferencias K1, K2 y K3 formen parte del triángulo ABC. Con la segunda solución daría lugar a que las circunferencias fuesen tangentes a los respectivos ángulos del triángulo ABC pero no formando parte del mismo.

En definitiva si ya tenemos el valor de r_k podemos ya, sin más averiguar el valor de la razón de semejanza H.

$H=\dfrac{r}{r-r_k}=\dfrac{r}{r-\dfrac{Rr}{2r+R}}=\dfrac{2r+R}{2r}$. Por fin ya podemos concluir la construcción solicitada.

Como caso particular notable, consideramos el triángulo equilátero de lado *l*. En este caso, la razón de semejanza $H=\dfrac{2r+R}{2r}=\dfrac{R+R}{R}=2$ y el valor r_k del radio común, $r_k=\dfrac{\sqrt{3}}{12}.l$ como resulta fácil de advertir.