

Problema 685

Ejemplo 93. Te dan un triángulo ABC. Construir cuatro circunferencias k , k_1 , k_2 y k_3 , de modo que sea verdadero:

1. Las circunferencias k_1 , k_2 y k_3 forman parte del triángulo ABC siendo tangentes a los ángulos α , β y γ .
- 2.- La circunferencia k es tangente exterior a las otras tres, teniendo todas el mismo radio.

Kuřina, F (1989) Arte de ver matemática. Statni pedagogiké nakladatelstvi. Praha. (p. 192)

Apreciaciones del director.

Consideremos algunas precisiones.

A) Caso del triángulo equilátero.

Sea un triángulo ABC equilátero de lado a .

Sea la circunferencia k_1 tangente a BAC; tendrá centro O_1 y radio s .

$O_1A=2s$.

Sean la k_2 y k_3 tangentes a ABC y a BCA de centros O_2 y O_3 y de radios iguales a s .

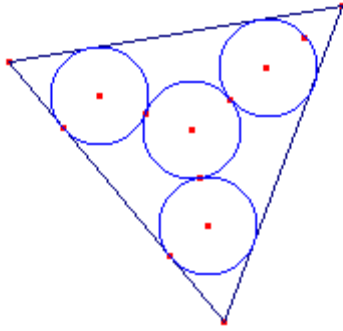
Hallemos el centro y el radio de la tangente exterior a las tres.

El centro es el centro O del triángulo inicial.

Así el radio será $OA-3s=\frac{\sqrt{3}a}{3}-3s$

Deseamos que este radio sea s , luego habrá de ser

$$s = \frac{\sqrt{3}a}{12}$$



Caso $a=4.46$; $s=0.64$.

2.- Caso triángulo rectángulo. Sea ABC con el ángulo recto en C.

Sea la circunferencia k_1 tangente a BAC; tendrá centro O_1 y radio s .

Sean la k_2 y k_3 tangentes a ABC y a BCA de centros O_2 y O_3 y de radios iguales a s .

Sea p el semiperímetro. El inradio de ABC es $p-b$.

Sean U y V los puntos de tangencia de k_3 con CA y CB.

Tenemos: $s = CU = CV$.

Sean T y R los puntos de tangencia de k_1 con AC y AB, respectivamente.

Así es: $\frac{AT}{s} = \frac{p-a}{p-c}$, $AT = s \frac{p-a}{p-c}$; $\frac{AR}{s} = \frac{p-a}{p-c}$, $AR = s \frac{p-a}{p-c}$

Sean S y W los puntos de tangencia de k_2 con BA y BC, respectivamente.

Es $BS = BW = s \frac{p-b}{p-c}$.

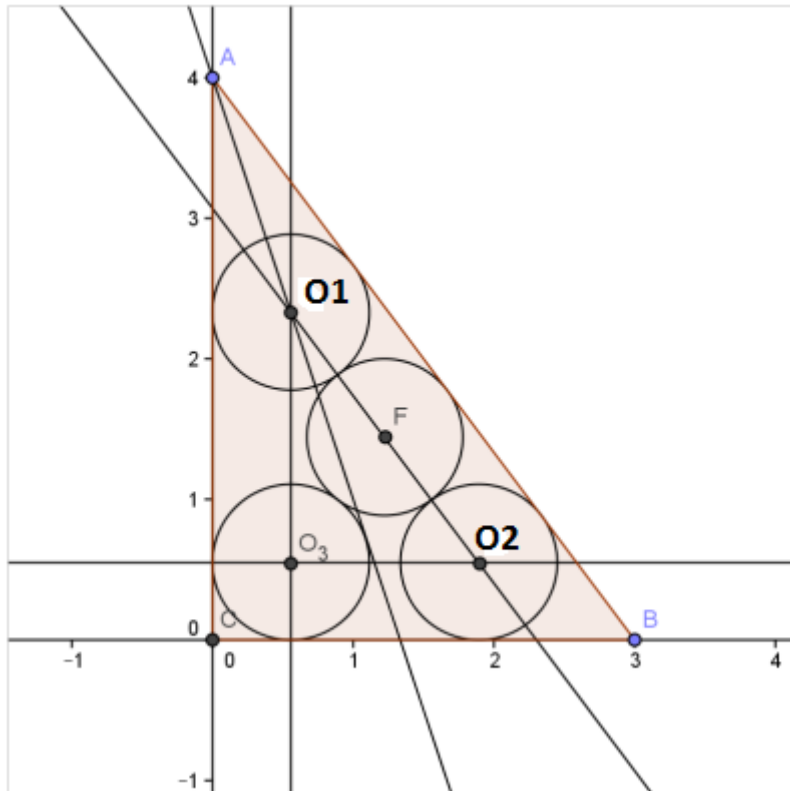
Observando detenidamente la hipotenusa c , dado que O_1O_2 debe ser $4s$ por pedir tangencia, habrá de ser

$c = AR + RS + SB$.

Es decir, $c = s \frac{p-a}{p-c} + 4s + s \frac{p-b}{p-c}$

De donde tenemos que $s = \frac{c(p-c)}{4p-3c}$

Así por ejemplo para el caso del triángulo 3, 4, 5, $s=5/9$



3.- Sea el caso general.

Supongamos el problema resuelto.

Sea R el circunradio y sea r el inradio de ABC .

Sean O_1 , O_2 , y O_3 los centros de k_1 , k_2 y k_3 . $O_1 O_2 O_3$ habrá de ser semejante a ABC . Sea F el circuncentro de k .

Al ser $FO_3=FO_2=FO_1=2s$, este es el radio circunscrito de $O_1 O_2 O_3$.

El incentro de O_1 , O_2 , y O_3 coincide con el de ABC , así, el inradio de $O_1 O_2 O_3$ es $r-s$.

Por tanto los correspondientes radios habrán de ser semejantes.

$$\frac{R}{2s} = \frac{r}{r-s}. \text{ Es decir, } s = \frac{Rr}{R+2r}$$

