***Problema* 685.**

Ejemplo 93. Te dan un triángulo ABC. Construir cuatro circunferencias k, k_1, k_2 y k_3 de modo que sea verdadero:

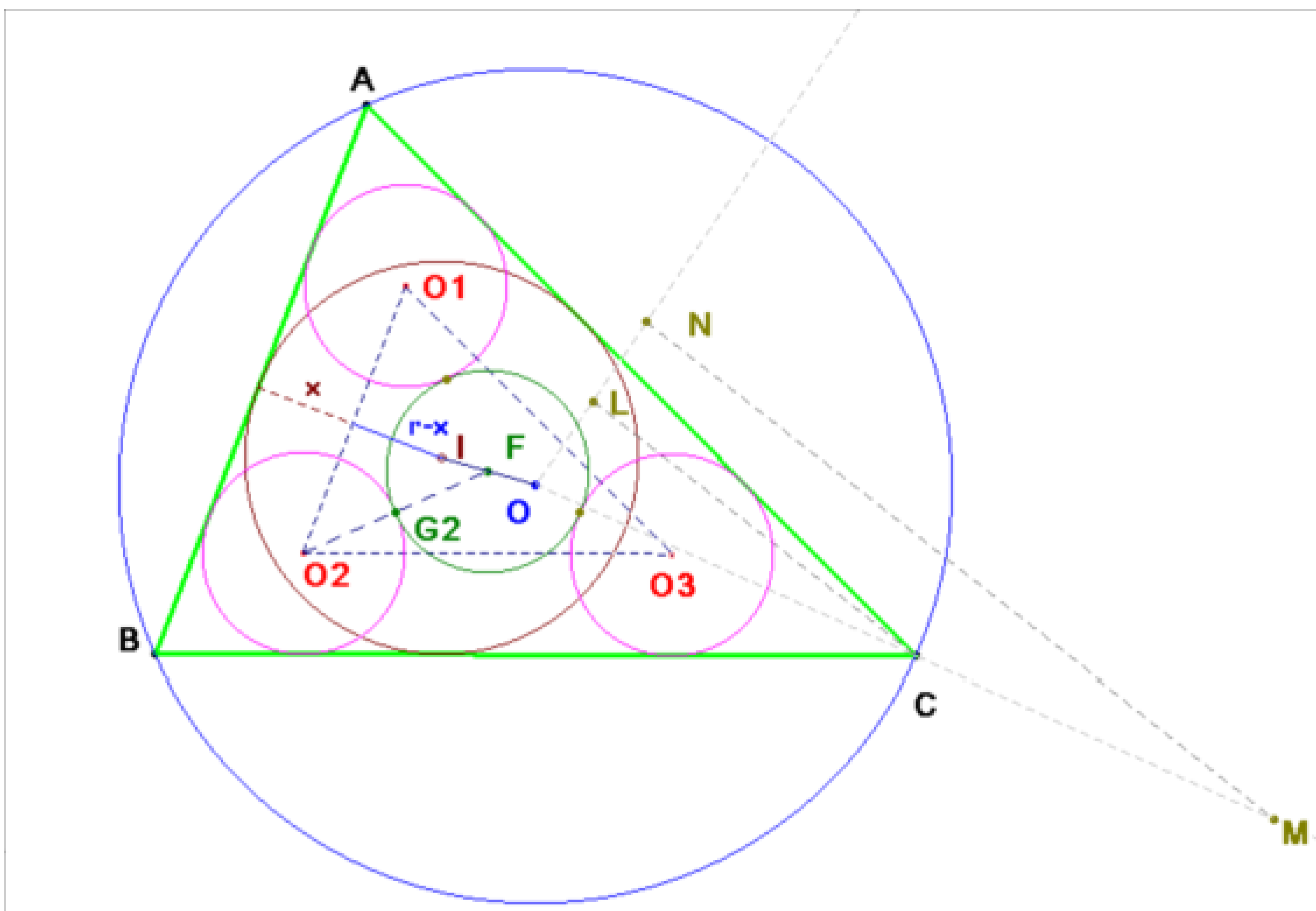
1. Las circunferencias k_1, k_2 y k_3 forman parte del triángulo ABC siendo tangentes a los ángulos α, β, y γ.

2. – La circunferencia k es tangente exterior a las otras tres, tendiendo todas el mismo radio.

Kuřina, F (1989). Arte de ver matemática. Statni pedagogiké nakladatelstvi. Praha. (p.192)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sea F el centro radical de las tres circunferencias k_1, k_2 y k_3 de radio x. Por las propiedades de la potencia de un punto, las distancias FO_i son iguales, por tanto, para encontrar una circunferencia k, tangente a k_i se toma de centro F y radio la distancia al punto G_i de k_i comprendido entre F y O_i, alineado con ellos.



Por ser k_1, k_2 y k_3 tangentes interiores al triángulo, sus centros han de estar situados en las correspondientes bisectrices, y por tener el mismo radio, el triángulo interior formado por estos, $O_1O_2\,O_3$ es de lados paralelos a ABC, y por tanto homotético a él. La razón de homotecia es $\frac{r}{r-x}$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, y su centro es I (el incentro).

La construcción de una circunferencia cualquiera tangente a estas tres exteriormente es muy sencilla: se toman paralelas interiores a los lados de ABC, a distancia x (radio de k_1, k_2 y k_3). Con ello quedan fijados los centros O_1, O_2 y O_3 de estas circunferencias. Se halla el centro radical F, y, uniendo con uno de los centros, se toma por radio para k el segmento FG_i.

Es evidente que variando el radio x de estas circunferencias, también variarán todos los demás objetos geométricos integrantes de la construcción.

Para que las cuatro circunferencias tengan igual radio, usamos la homotecia entre los triángulos $O_1O_2\,O_3$ y ABC.

Sus circunferencias circunscritas también son homotéticas, una tiene radio R y la otra $2x$ por tanto, $2x = R \cdot \frac{r-x}{r}$, despejando se obtiene

$$x = \frac{rR}{2r + R}$$

aunque resulta de más interés escribir esa expresión en la forma

$$\frac{r}{x} = \frac{R + 2r}{R}$$

que sugiere la construcción de x a partir de los radios de la inscrita y la circunscrita, como se muestra en la figura. Se han tomado $ON = r, OM = R + 2r$. De ahí $OL = x$ el valor del radio común a las cuatro circunferencias tangentes. ■