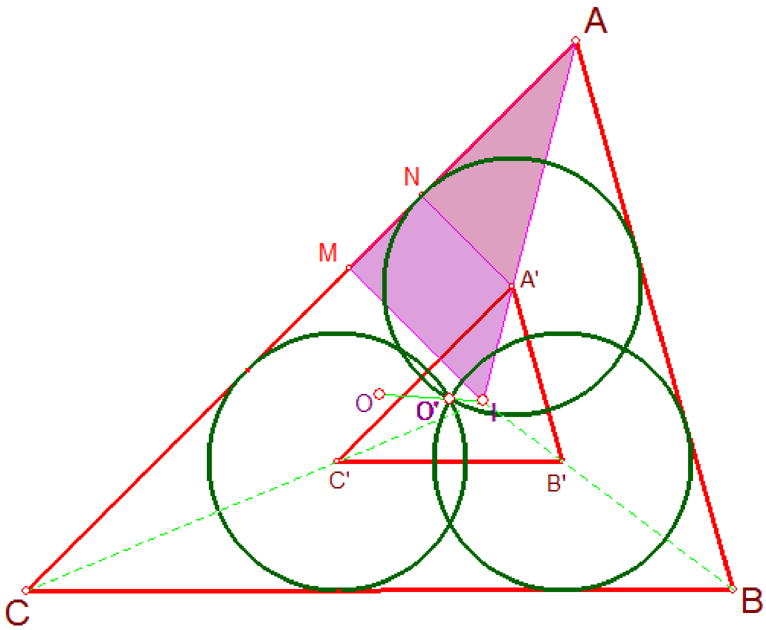
Problema 686.-
Dado un triángulo ABC, construir tres circunferencias k1, k2 y k3, del mismo radio, de modo que sean tangentes interiores a los ángulos α, β, γ y tengan un punto común las tres.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sean dadas las tres circunferencias, todas ellas de igual radio, y que han de guardar la posición fijada en el enunciado del problema. Para que esto suceda, ha de pasar que los centros A', B' y C' de las circunferencias K1, K2 y K3 deben estar sobre cada una de las bisectrices del triángulo ABC.
Como además las circunferencias K1, K2 y K3 tienen iguales radios k, resultará que ambos triángulos ABC y A'B'C' serán semejantes. De este hecho se infiere que, estos triángulos comparten el mismo Incentro I, siendo además este punto, el centro de semejanza de dichos triángulos.



La razón de semejanza H será $H=\frac{IA}{IA'}=\frac{IA}{IA-AA'}=\frac{1}{1-\frac{AA'}{IA}}=\frac{1}{1-\frac{k}{r}}$, es decir $H=\frac{r}{r-k}$ siendo r y k los respectivos radios de la circunferencia inscrita y de las circunferencias K1, K2 y K3.
Por otro lado, la razón de los circunradios R y R'=k, de los respectivos triángulos ABC y A'B'C', estarán en la misma proporción H. Por tanto $H=\frac{r}{r-k}=\frac{R}{R'}=\frac{R}{k}$

De esta forma tenemos que $k=\frac{R\cdot r}{r+R}$ y, por tanto $H=\frac{R+r}{r}$
Por fin ya podemos concluir la construcción solicitada del siguiente modo.
Determinamos en primer lugar los puntos O e I, Circuncentro e Incentro del triángulo inicial ABC, respectivamente.
Ahora construimos el punto O' de modo que se cumpla la relación de semejanza $H=\frac{IO}{IO'}=\frac{R+r}{r}$ y así, por fin, construimos los puntos A', B' y C', sabiendo que están en las bisectrices del triángulo ABC a una distancia del punto O' igual al valor $k=\frac{R\cdot r}{r+R}$