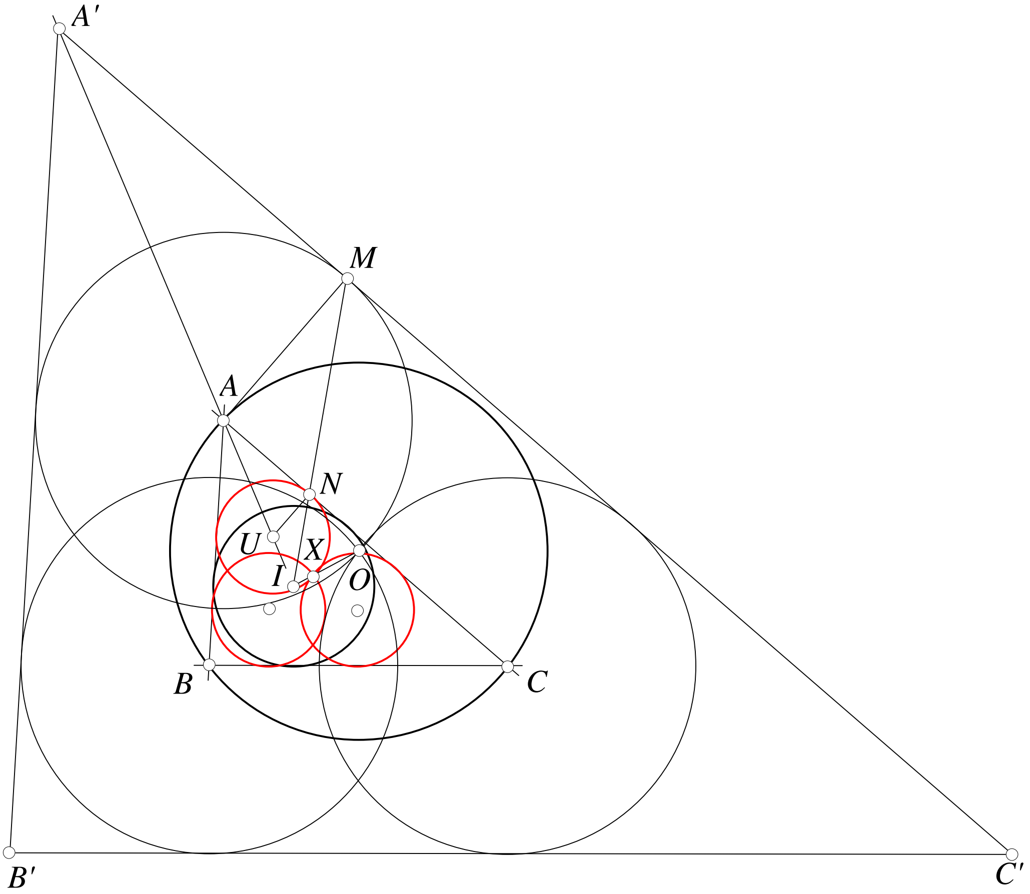
Problema 686 de *triánguloscabri*. *Dado un triángulo ABC, construir tres circunferencias k_1, k_2 y k_3, del mismo radio, de modo que sean tangentes interiores a los ángulos α, β y γ y tengan un punto común a las tres.*

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Si el triángulo ABC tiene circuncentro O y circunradio R, por ser $AO = BO = CO = R$, al trazar las circunferencias con centros A, B, C y radio R, tendrán a O como punto común.



Los círculos buscados se pueden obtener al aplicar a los círculos (A), (B), (C) de radio R una homotecia de centro I y razón

$$\frac{IA}{IA'} = \frac{r}{R+r}.$$

El punto común a los tres nuevos círculos será un punto sobre el segmento IO tal que

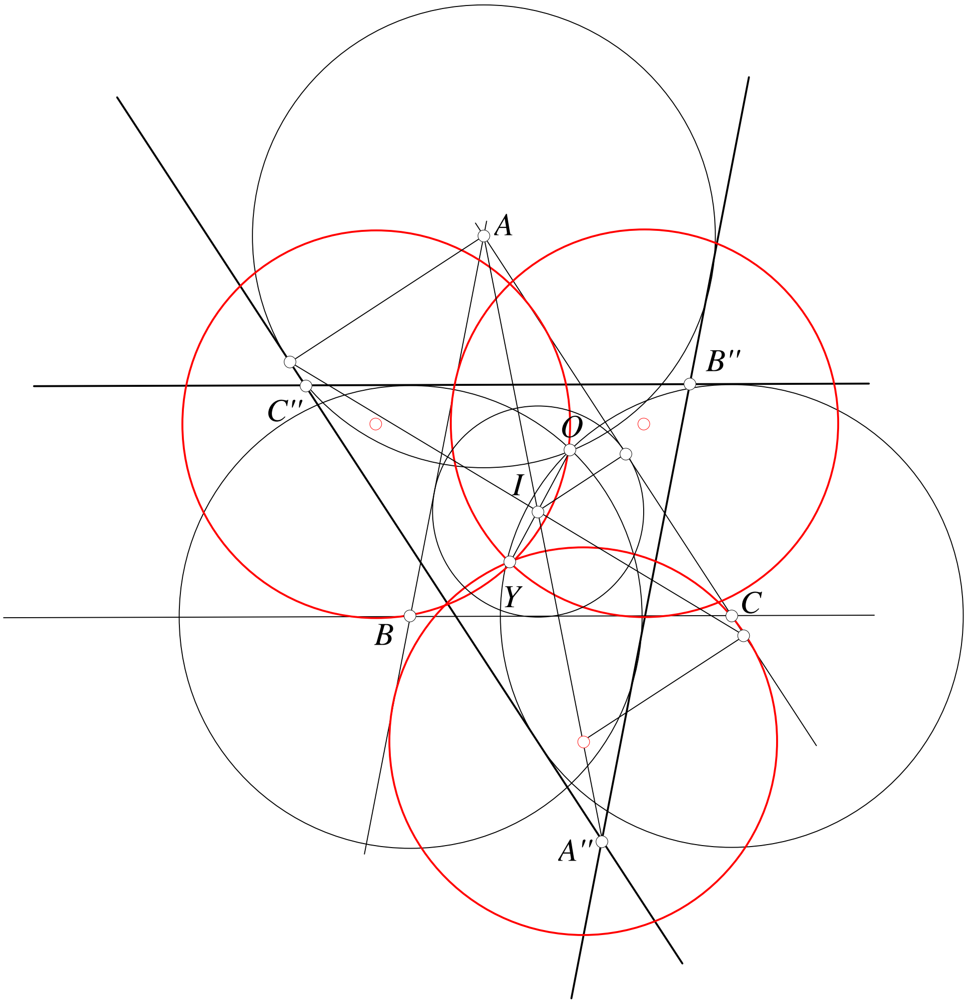
$$\frac{IX}{IO} = \frac{r}{R+r} \Rightarrow \frac{XO}{IO} = \frac{R}{R+r} \Rightarrow IX : XO = r : R,$$

es decir $X = X_{55}$ es el centro de homotecia interno de la circunferencia inscrita y de la circunscrita y el radio común alos tres círculos será $Rr/(R+r)$.

Si trazamos las paralelas a distancia R internamente a los lados del triángulo obtenemos un triángulo $A''B''C''$ inversamente homotético a ABC en el que tenemos

$$\frac{IA''}{IA} = -\frac{R-r}{r}.$$

El punto común a los tres círculos será $Y = X_{56}$, el centro de semejanza externo de las circunferencias inscrita y circunscrita, que dividide al segmento IO en la razón $-r : R$.



El radio de las tres circunferencias es, en este caso, $Rr/(R-r)$.