

Problema 686

Donat el triangle $\triangle ABC$ determineu les circumferències k_1, k_2, k_3 interiors al triangle i que siguin tangents als costats que formen els angles α, β, γ del triangle i les tres circumferències tenen un punt d'intersecció.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Siguen O_1, O_2, O_3 els centres de les circumferències k_1, k_2, k_3 i $\overline{O_1T_1} = \overline{O_2T_2} = x$ el radi.

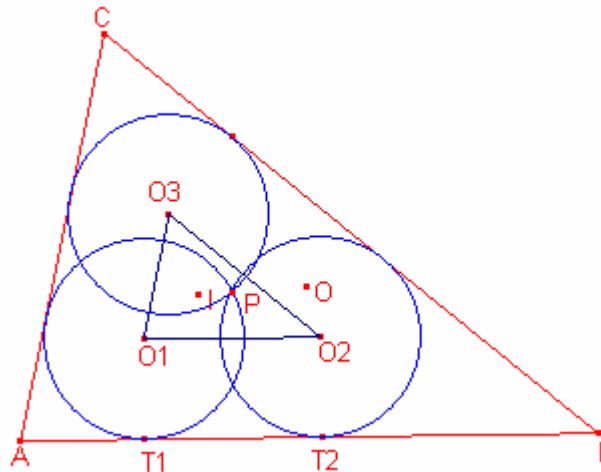
Considerem el triangle $\triangle O_1O_2O_3$.

Els triangles $\triangle O_1O_2O_3, \triangle ABC$ són semblants.

Siga P el punt d'intersecció de les circumferències k_1, k_2, k_3 .

$$\overline{PO_1} = \overline{PO_2} = \overline{PO_3} = x.$$

P és el circumcentre del triangle $\triangle O_1O_2O_3$. El radi de la circumferència circumscrita és x.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AT_1O_1$: $\overline{AT_1} = \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BT_2O_2$: $\overline{BT_2} = \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}$.

$$\overline{O_1O_2} = c - \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle O_1O_2O_3$:

$$\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin C} = 2x$$

$$\frac{c - \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}}{\sin C} = 2x.$$

$$x = \frac{c}{2 \sin C + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}}. \text{ Simplifiquem el resultat.}$$

Siguen R, r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita al triangle $\triangle ABC$.

Siga $p = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre.

$$\sin C = \frac{c}{2R}, \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}.$$

$$x = \frac{Rr}{R+r}.$$