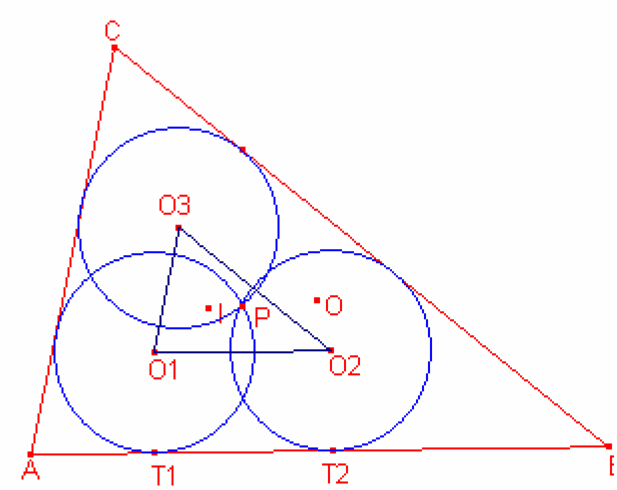
Problema 686

Dado un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, construir tres circunferencias k_1 , k_2 y k_3, del mismo radio, de modo que sean tangentes interiores a los ángulos a , ß y ?, y tengan un punto común a las tres.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.



Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Sean O_1, O_2, O_3 los centros de las circunferencias k_1, k_2, k_3 i $\overline{O_1T_1}=\overline{O_2T_2}=x$ el radio.

Consideremos el triángulo $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ son semejantes.

Sea P el punto e 'intersección de las circunferencias k_1, k_2, k_3.

$\overline{PO_1}=\overline{PO_2}=\overline{PO_3}=x$.

P es el circuncentro del triángulo $\overset{?}{O_1O_2O_3}$. El radio de la circunferencia circunscrita es x.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AT_1O_1}$: $\overline{AT_1}=\dfrac{x}{\mathrm{tg}\frac{A}{2}}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BT_2O_2}$: $\overline{BT_2}=\dfrac{x}{\mathrm{tg}\frac{b}{2}}$.

$$\overline{O_1O_2}=c-\frac{x}{\mathrm{tg}\frac{A}{2}}-\frac{x}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}}.$$

Aplicando el teorema de los senoss al triángulo $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$:

$$\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin C}=2x$$

$$\frac{c-\frac{x}{\mathrm{tg}\frac{A}{2}}-\frac{x}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}}}{\sin C}=2x.$$

$$x=\frac{c}{2\sin C+\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{A}{2}}+\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}}}$$ .Simplifiquemos el resultado.

Sean R, r los radios de les circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro.

$$\sin C=\frac{c}{2R},\ \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},\ \mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}. \qquad x=\frac{Rr}{R+r}.$$