

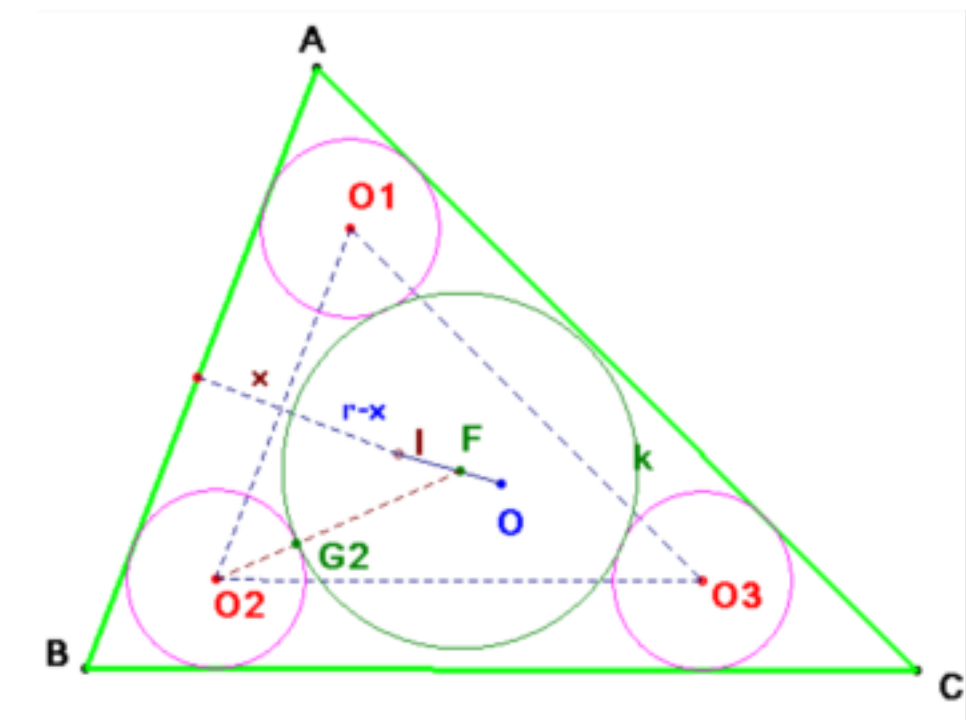
Problema 686.- Dado un triángulo ABC , construir tres circunferencias k_1 , k_2 y k_3 del mismo radio, de modo que sean tangentes interiores a los ángulos α , β , y γ , y tengan un punto común las tres.

Barroso, R (2013). Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Siguiendo un razonamiento exactamente igual al empleado en el problema anterior, número 685, construimos una circunferencia k tangente a tres circunferencias k_1 , k_2 y k_3 de radio x . Supongamos que la construcción está hecha. Repetiremos lo dicho entonces:

Sea F el centro radical de las tres circunferencias k_1 , k_2 y k_3 de radio x . Por las propiedades de la potencia de un punto, las distancias FO_i son iguales, por tanto, para encontrar una circunferencia k , tangente a k_i se toma de centro F y radio la distancia al punto G_i de k_i comprendido entre F y O_i , alineado con ellos.



Por ser k_1 , k_2 y k_3 tangentes interiores al triángulo, sus centros han de estar situados en las correspondientes bisectrices, y por tener el mismo radio, el triángulo interior formado por estos, $O_1O_2O_3$ es de lados paralelos a ABC , y por tanto homotético a él. La razón de homotecia es $\frac{r}{r-x}$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, y su centro es I (el incentro).

La construcción de una circunferencia cualquiera tangente a estas tres exteriormente es muy sencilla: se toman paralelas interiores a los lados de ABC , a distancia x (radio de k_1 , k_2 y k_3). Con ello quedan fijados los centros O_1 , O_2 y

O_3 de estas circunferencias. Se halla el centro radical F , y uniendo con uno de los centros, se toma por radio para k el segmento $y=FG_i$.

Es evidente que variando el radio x de estas circunferencias, también variarán todos los demás objetos geométricos integrantes de la construcción.

Para que las tres circunferencias de igual radio se corten en un punto, bastará que la circunferencia k tangente a ellas se reduzca a un punto: al centro radical F . Para ello usamos la homotecia entre los triángulos $O_1O_2O_3$ y ABC .

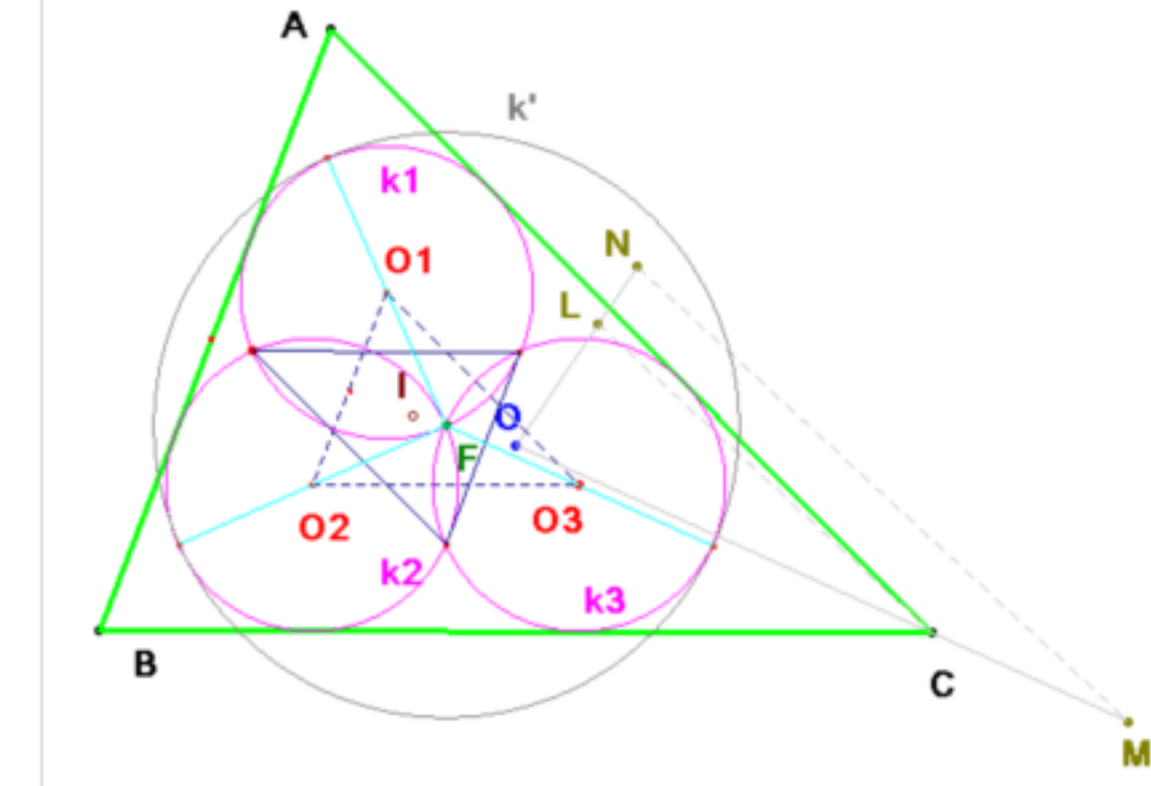
Sus circunferencias circunscritas también son homotéticas, una tiene radio R y la otra $x+y$ por tanto, $x+y=R\cdot\frac{r-x}{r}$. Si anulamos y obtendremos

$$x=\frac{rR}{r+R}$$

que es la mitad de la media armónica de los radios r y R , aunque resulta de más interés escribir esa expresión en la forma

$$\frac{r}{x}=\frac{R+r}{R}$$

que sugiere la construcción de x a partir de los radios de la inscrita y la circunscrita, como se muestra en la figura. Se han tomado $ON=r$, $OM=R+r$. De ahí $OL=x$ el valor del radio común a las tres circunferencias tangentes.



(Como colofón, con radio $2x$, o sea, la media armónica de R y r , puede trazarse una circunferencia k' , centrada en F , tangente a las k_i .) ■