

Problema 687, propuesto en el libro *Sacred Geometry. Philosophy & Practice*; Lawlor, R., Thames & Hudson, 1982, página 88:

Construyamos una circunferencia Ω de centro L y radio LA y dibujemos el diámetro AC . Tracemos una recta m perpendicular a AC por A . Una circunferencia de centro A y radio AC cortará a m en F , situado a la derecha de A .

La recta FL corta a la circunferencia Ω en N y H , con N más cercano a F .

Construyamos una recta perpendicular por A a FH , que cortará otra vez a Ω en D .

Tracemos otra perpendicular a FH por C , que cortará a Ω otra vez en B . BC corta a la recta FL en J .

Demostrar que:

(A) El triángulo ABC es rectángulo con catetos proporcionales a 1, 2.

Sea la recta FD , que cortará a la recta CA en E .

(B) El triángulo FAE es rectángulo semejante a 3, 4, 5.

(C) $JN/AB = \varphi$.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Sea r el radio de Ω y consideremos la referencia cartesiana rectangular en la cual $L(0,0)$, $A(0,-r)$, $C(0,r)$.

(A) Se tiene que $F(2r,-r)$, luego $m_{FL} = \frac{-r-0}{2r-0} = -1/2$, de donde $m_{BC} = -1/m_{FL} = 2$, luego

$BC: y-r = 2(x-0)$. El punto $B = \Omega \cap BC$, siendo $\Omega: x^2 + y^2 = r^2$, con lo cual $x_B^2 + (2x_B + r)^2 = r^2$, siendo entonces $x_B = -4r/5$ y, por tanto, $B(-4r/5, -3r/5)$. Como $\angle ABC$ es un ángulo inscrito en Ω que abarca un diámetro suyo (AC), el triángulo ABC es rectángulo en B . Además, $AB = \sqrt{(-4r/5-0)^2 + (-3r/5+r)^2} = 2r/\sqrt{5}$ y $BC = \sqrt{(0+4r/5)^2 + (r+3r/5)^2} = 4r/\sqrt{5} = 2AB$, luego ABC es rectángulo con catetos proporcionales a 1, 2.

(B) $m_{AD} = m_{BC} = 2$, siendo así $AD: y+r = 2(x-0)$. El punto $D = \Omega \cap AD$, siendo $\Omega: x^2 + y^2 = r^2$, con lo cual $D(4r/5, 3r/5)$ (simétrico de D respecto a L). Entonces

$FD: y+r = \frac{3r/5+r}{4r/5-r}(x-2r)$ y, como $E = FD \cap AC$, siendo $AC: x=0$, resulta $E(0, 5r/3)$. Como

$FA = m$ es perpendicular a $AC = AE$, el triángulo FAE es rectángulo en A . Además, $AE = 4 \cdot 2r/3$, $AF = 3 \cdot 2r/3$ y $FE = \sqrt{(0-2r)^2 + (5r/3+r)^2} = 5 \cdot 2r/3$, luego FAE es rectángulo en A y semejante al triángulo rectángulo 3, 4, 5, con razón de semejanza $2r/3$.

(C) $J = FL \cap BC$, siendo $FL: y = -x/2$ y $BC: y-r = \frac{8r/5}{4r/5}(x-0)$, luego $J(-2r/5, r/5)$, y

$N = \Omega \cap FL$, luego $N\left(2r/\sqrt{5}, -r/\sqrt{5}\right)$. Así, $JN = \sqrt{\left(2r/\sqrt{5} + 2r/5\right)^2 + \left(-r/\sqrt{5} - r/5\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}r$ y

$AB = 2r/\sqrt{5}$, con lo cual $JN/AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$.