Problema 687.

Construyamos una circunferencia Ω de centro L y radio LA y dibujemos el diámetro AC. Tracemos una recta m perpendicular a AC por A. Una circunferencia de centro A y radio AC cortará a m en F, situado a la derecha de A.

La recta FL corta a la circunferencia Ω en N y H, con N más cercano a F. Construyamos una recta perpendicular por A a FH que cortará otra vez a Ω en D. Tracemos otra perpendicular a FH por C que cortará a Ω otra vez en B. BC corta a la recta FL en J.
Demostrar que:

(A)El triángulo ABC es rectángulo con catetos proporcionales a 1 y 2.

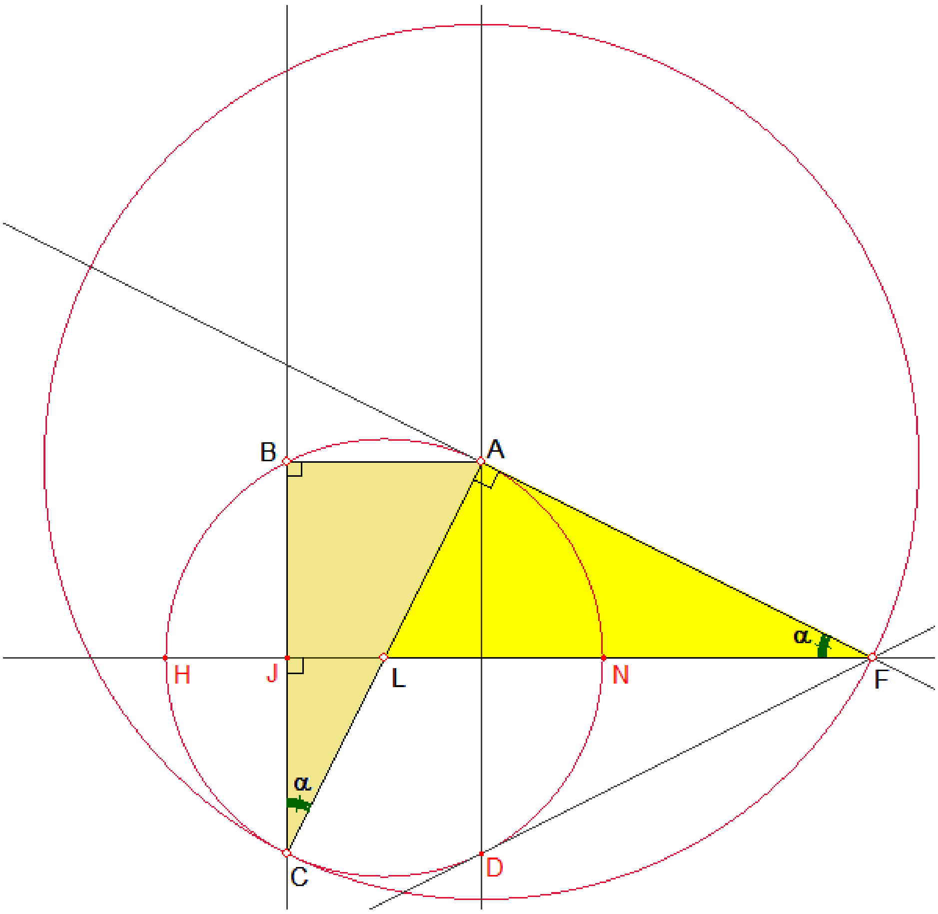
Sea la recta FD, que cortará a la recta CA en E.
(B) El triángulo FAE es rectángulo semejante a 3,4,5

(C) JN/AB = φ.

Lawlor, R. (1982): Sacred Geometry. Philosophy & Practice . Thames & Hudson(Pag 88)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

De la construcción realizada se observan los siguientes hechos de interés:



a) Los triángulos rectángulos AFL y ABC son semejantes.
Este hecho se deduce trivialmente al observar que FA es la recta tangente a la circunferencia Ω trazada desde el punto F y así, por tanto, el ángulo en A es recto.

Por otro lado, en el triángulo ABC, el ángulo en C está formado por las rectas perpendiculares que forman el ángulo en F.
A este ángulo lo llamamos α.

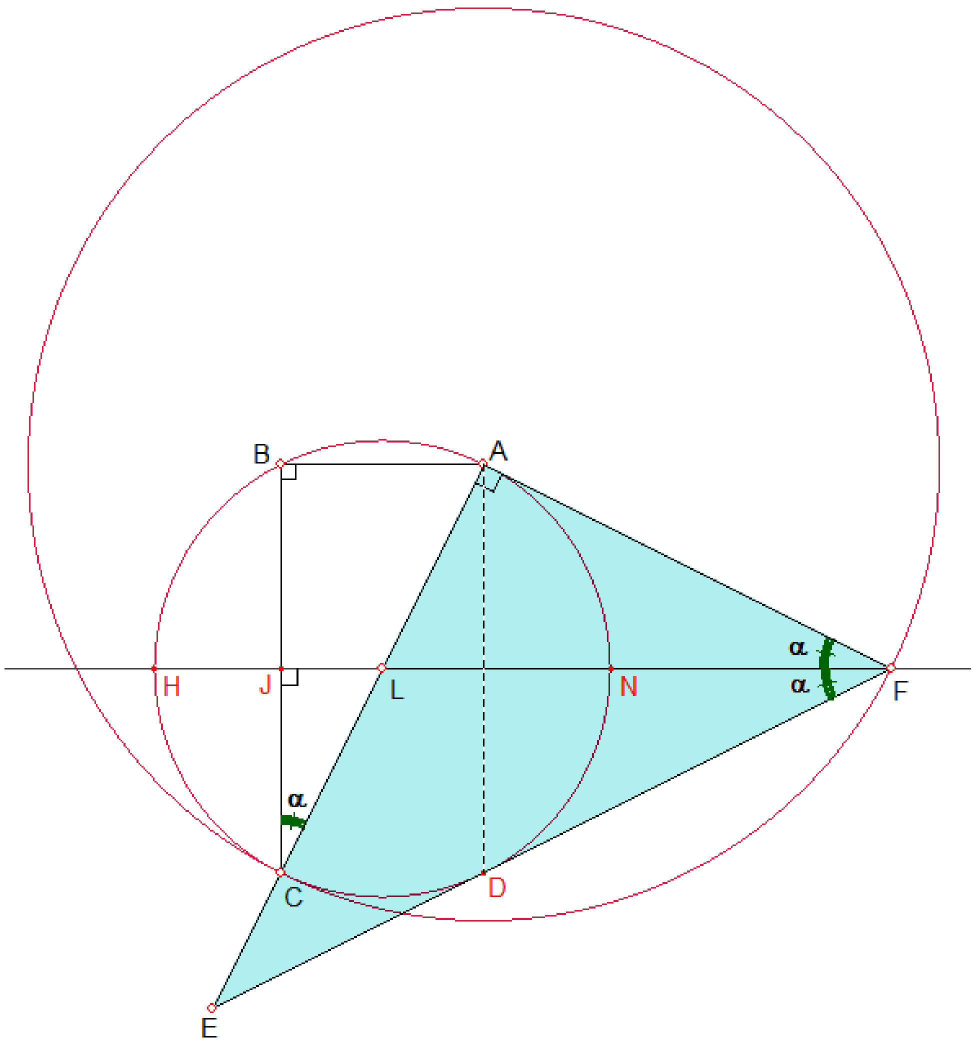
Como A y C son puntos diametralmente opuestos en la circunferencia Ω, el ángulo en B es recto.

De esta forma, los triángulos rectángulos AFL y ABC son semejantes.

Como quiera que los catetos del triángulo rectángulo AFL son $AL = R \; y \; AF = 2R$, entonces también los catetos del triángulo rectángulo ABC, semejante al AFL, estarán en la misma proporción 1:2. Como consecuencia de este resultado, podemos obtener los valores de los lados del triángulo ABC en función del radio R.

Al ser la hipotenusa AC=2R, entonces $AB^2 + 4AB^2 = 4R^2 \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{5}}R \;\; y \;\; BC = \frac{4}{\sqrt{5}}R$.

b) De la construcción realizada para obtener el punto E, deducimos que en el triángulo rectángulo EAF, la medida del ángulo $\sphericalangle AFE = 2\alpha$ y, por tanto, podemos hacer uso de las razones trigonométricas de dicho ángulo del modo siguiente:



Como las razones del ángulo α son conocidas, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y $sen\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, entonces:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \frac{3}{5}$$
$$sen 2\alpha = 2 sen\alpha \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

→ El triángulo rectángulo EAF es semejante al de catetos 3:4.

c) Como ya se sabe por el primer apartado $AB = \dfrac{2}{\sqrt{5}}R$ y $BC = \dfrac{4}{\sqrt{5}}R$.

Por otra parte, el segmento JN= JL+LN. Como $JL = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{\sqrt{5}}R$ y $LN = R$, podemos finalmente relacionar ambos segmentos:

$$\frac{JN}{AB} = \frac{JL + LN}{AB} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}R + R}{\frac{2}{\sqrt{5}}R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$