

Problema 687

Construïm una circumferència Ω de centre L i radi $\overline{LA}$ i dibuixem el diàmetre $\overline{AC}$.

Tracem una recta m perpendicular a $\overline{AC}$ per A.

Una circumferència de centre A i radi $\overline{AC}$ tallarà a m en F, situat a la dreta de A.

La recta FL talla la circumferència Ω en N i H, amb N més proper a F.

Construïm una recta perpendicular per A a FH que tallarà altra vegada a Ω en D.

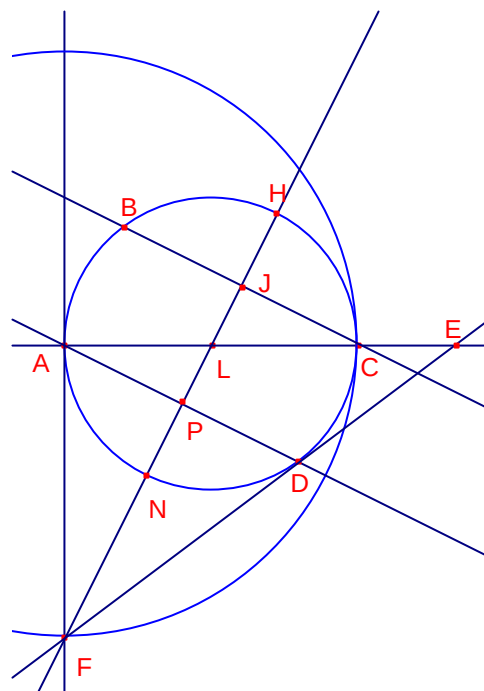
Tracem una altra recta perpendicular a FH per C que tallarà altra vegada a Ω en B.
BC talla la recta FL en J. Demostreu que:

A) El triangle $\triangle ABC$ és rectangle amb catets proporcionals a 1:2.

Siga la recta FD que tallarà a la recta CA en E.

B) El triangle $\triangle FAE$ és rectangle semblant a 3:4:5.

C) $\frac{\overline{JN}}{\overline{AB}} = \Phi$.



Solució:

A)

Siga $\overline{LA} = r$ radi de la circumferència Ω .

$\angle ABC = 90^\circ$ per ser un angle inscrit en Ω i abraçar un diàmetre.

Anàlogament, $\angle ADC = 90^\circ$.

$\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ són paral·leles.

Aleshores, ABCD és un rectangle. $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ són iguals i paral·lels.

Notem que el triangle rectangle $\triangle FAL$ els catets són $\overline{AL} = r$, $\overline{AF} = 2r$, és a dir, estan en proporció $\overline{AL} : \overline{AF} = 1 : 2$.

Els triangles rectangles $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle LAF$ són semblants. Per tant, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle amb catets proporcionals a $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$.

B)

La recta FL passa pel centre L de la circumferència Ω , aleshores, talla la corda $\overline{AD}$ en el punt mig P.

Siga $\alpha = \angle AFL$. $\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Considerem el triangle rectangle $\triangle FAE$.

$\angle AFE = 2\alpha$.

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{2\text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Aleshores, el triangle $\triangle FAE$ és rectangle semblant a 3:4:5.

C)

Notem que $\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{PJ} = \overline{BJ} = \overline{CJ}$.

Aplicant la potència del punt J respecte de la circumferència Ω :

$$\overline{JN} \cdot \overline{JH} = \overline{BJ} \cdot \overline{CJ}.$$

$$\overline{JN} \cdot (\overline{JN} - \overline{AB}) = \overline{AB}^2.$$