Problema 687

Construyamos una circunferencia ? de centro L y radio LA y dibujemos el diámetro AC. Tracemos una recta m perpendicular a AC por A. Una circunferencia de centro A y radio AC cortará a m en F, situado a la derecha de A.

La recta FL corta a la circunferencia ? en N y H, con N más cercano a F.

Construyamos una recta perpendicular por A a FH que cortará otra vez a ? en D.

Tracemos otra perpendicular a FH por C que cortará a ? otra vez en B. BC corta a la recta FL en J.

Demostrar que:

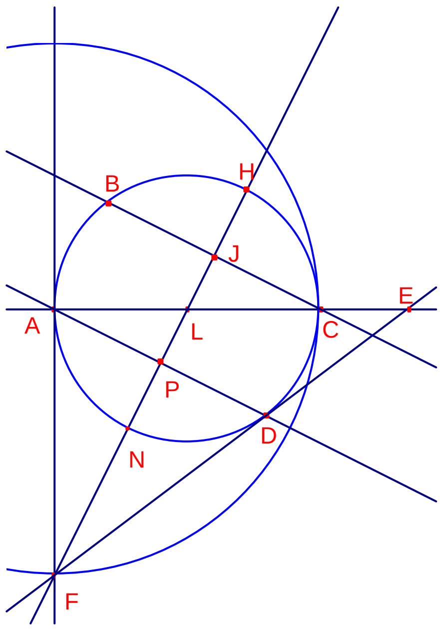
(A)El triángulo ABC es rectángulo con catetos proporcionales a 1, 2, .

Sea la recta FD, que cortará a la recta CA en E.

(B) El triángulo FAE es rectángulo semejante a 3,4,5

(C) JN/AB = f .

Lawlor, R. (1982): Sacred Geometry. Philosophy & Practice . Thames & Hudson(Pag 88)



Solución de Ricard Peiró:

A)

Sea $\overline{LA} = r$ radio de la circunferencia Ω.

$\angle ABC = 90^o$ por ser un ángulo inscrito en Ω y abarcar un diámetro.

Análogamente, $\angle ADC = 90^o$.

$\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos.

Entonces, ABCD es un rectángulo. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales y paralelos.

Notemos que el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{FAL}$ los catetos son $\overline{AL} = r$, $\overline{AF} = 2r$, es decir, están en proporción $\overline{AL} : \overline{AF} = 1:2$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{LAF}$ son semejantes. Por tanto, el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo con catetos proporcionales a $\overline{AB} : \overline{BC} = 1:2$.

B)

La recta FL pasa por el centro L de la circunferencia Ω, entonces, corta la cuerda $\overline{AD}$ en el punto medio P.

Sea $\alpha = \angle AFL$. $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{FAE}$.

$\angle AFE = 2\alpha$.

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{FAE}$ es rectángulo semejante a 3:4:5.

C)

Notemos que $\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{PJ} = \overline{BJ} = \overline{CJ}$.

Aplicando la potencia del punto J respecto de la circunferencia Ω:

$\overline{JN} \cdot \overline{JH} = \overline{BJ} \cdot \overline{CJ}$.

$\overline{JN} \cdot \left(\overline{JN} - \overline{AB}\right) = \overline{AB}^2$.

$\left(\frac{\overline{JN}}{\overline{AB}}\right)^2 - \left(\frac{\overline{JN}}{\overline{AB}}\right) - 1 = 0$. Entonces:

$\frac{\overline{JN}}{\overline{AB}} = \Phi$.