***Problema 687**.- Construyamos una circunferencia Ω de centro L y radio LA y dibujemos el diámetro AC. Tracemos una recta m perpendicular a AC por A. Una circunferencia de centro A y radio AC cortará a m en F, situado a la derecha de A.*

La recta FL corta a la circunferencia Ω en N y H, con N más cercano a F. Construyamos una recta perpendicular por A a FH que cortará otra vez a Ω en D. Tracemos otra perpendicular a FH por C que cortará a Ω otra vez en B. BC corta a la recta FL en J. Demostrar que:

(A) *El triángulo ABC es rectángulo con catetos proporcionales a 1, 2.*

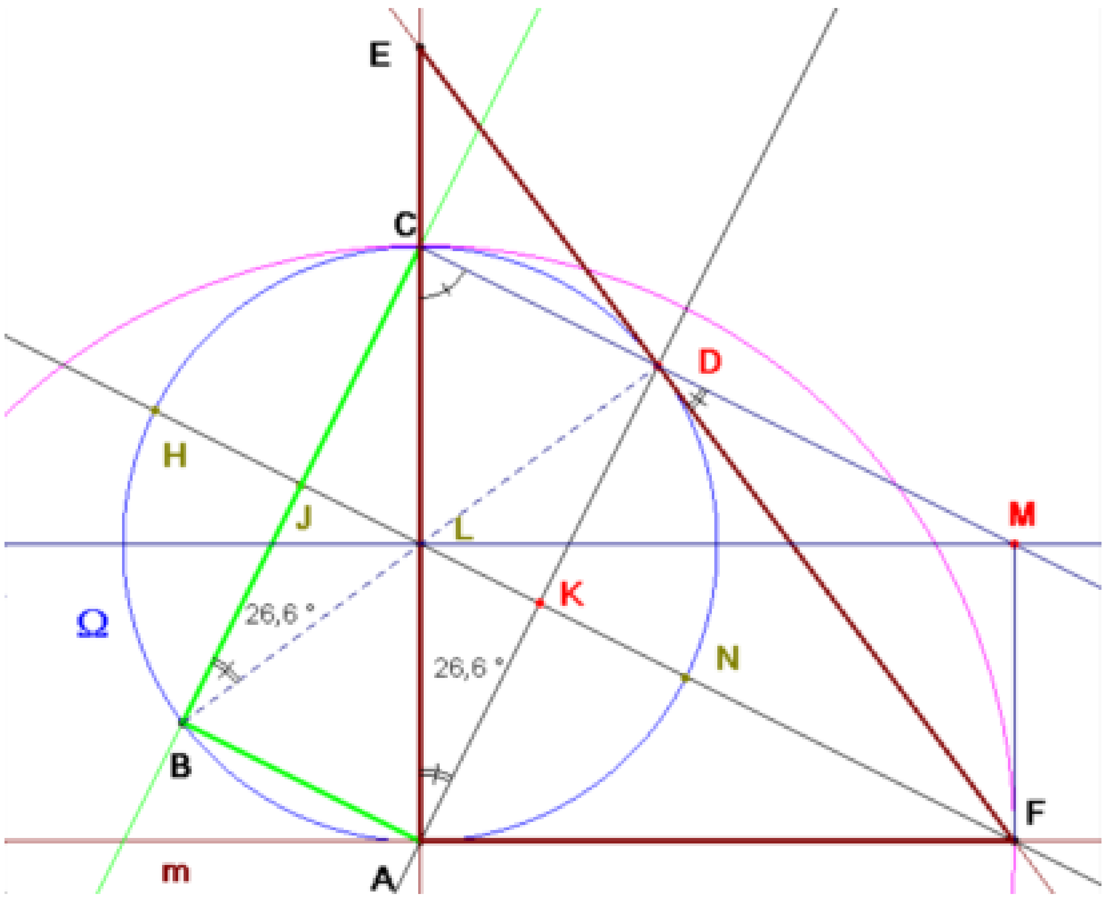
Sea la recta FD, que cortará a la recta CA en E.

(B) *El triángulo FAE es rectángulo semejante a 3,4,5.*

(C) $JN/AB = \varphi$.

Lawlor, R. (1982): Sacred Geometry. Philosophy & Practice . Thames & Hudson (Pag 88).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



(A) FL es la mediatriz de AD y por ello CD, FL y AB son paralelas. Construimos el paralelogramo $CLFM$. En él, el triángulo $\triangle CLM$ tiene sus catetos en la razón 1:2, y es semejante a $\triangle CDA$ con el que comparte un ángulo, y éste a su vez, semejante a $\triangle ABC$. Esto concluye esta parte.

(B) Designamos por R el radio de la circunferencia Ω. Para que el triángulo FAE sea del tipo 3,4,5, como $AC = AF$, se necesita que $3 \cdot EC = AF = 2R$.

Los triángulos CDE y DAE son semejantes, pues comparten el ángulo en E y además $\measuredangle CDE = \measuredangle FDM = \measuredangle DBC$ (por tener sus lados perpendiculares) y éste último igual a $\measuredangle CAD$ como inscritos que abarcan el mismo arco. La razón de semejanza es $\frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$ por la parte anterior. Por tanto $DE = \frac{1}{2}AE$.

De otra parte, con la potencia de E respecto de Ω se tiene:

$Pot(DE;\ \Omega) = ED^2 = EC \cdot EA$. Llamando $x = EC$, la expresión de la potencia es la ecuación

$$\frac{1}{4}(x+2R)^2 = x \cdot (x+2R) \Leftrightarrow x + 2R = 4x$$

de donde $x = \frac{2}{3}R$, que es lo que pretendíamos demostrar.

(C) AD corta a la recta FL en K. $JN = AB + KN$, por tanto $\frac{JN}{AB} = 1 + \frac{KN}{AB}$. Sabiendo que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tendremos que demostrar que $\frac{KN}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Vamos a aplicar el teorema de Pitágoras a dos triángulos rectángulos:

En el triángulo $\triangle ABC$, tenemos $AB^2 + 4AB^2 = AC^2 = 4R^2$; de ahí $AB = \frac{2}{\sqrt{5}}R$.

En $\triangle FAL$, $FL = \sqrt{5}R$, y por el teorema del cateto, $AL^2 = FL \cdot KL = FL \cdot (LN - KN)$.

Sustituyendo las cantidades conocidas se llega a $R^2 = \sqrt{5}R \cdot (R - KN)$. Resolviendo en KN se obtiene finalmente

$$KN = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}R$$

y $\frac{KN}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{5}}{2R} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y aquí concluímos. ■