

GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO.-

ARTÍCULO ESPECIAL CON MOTIVO DE LA EDICIÓN DEL NÚMERO 700 DE LA REVISTA.

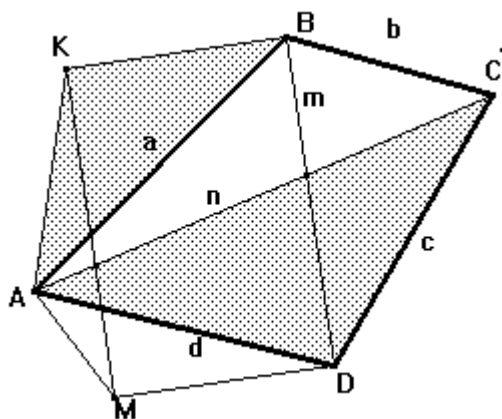
ALGUNOS TEOREMAS OLVIDADOS: BRETSCHNEIDER Y POMPEIU.

Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante (Córdoba)

1.- Teorema de Bretschneider (teorema de los cosenos para el cuadrilátero).

Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero; m y n , sus diagonales; A y C , dos ángulos opuestos.

Entonces se cumple la relación $m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A + C)$



Dem. — Sea el cuadrilátero ABCD, de lados a, b, c y d , y de diagonales m y n .

Construyamos en el lado AB y hacia el exterior, el triángulo AKB semejante al triángulo ACD siendo $\angle BAK = \angle DCA$, $\angle ABK = \angle CAD$ y en el lado AD construyamos el triángulo $\triangle AMD$ semejante al $\triangle ABC$, $\angle DAM = \angle BCA$, $\angle ADM = \angle CAB$.

A partir de las semejanzas correspondientes, obtenemos:

$$\frac{AK}{c} = \frac{a}{n} \rightarrow AK = \frac{a \cdot c}{n}; \quad \frac{AM}{b} = \frac{d}{n} \rightarrow AM = \frac{b \cdot d}{n};$$

Por otro lado, tenemos que: $\frac{BK}{d} = \frac{a}{n} = \frac{MD}{d}$, de donde $BK = MD$ y como además:

$\angle KBD + \angle BDM = \angle CAD + \angle ABD + \angle BDA + \angle BAC = 180^\circ$, es decir el cuadrilátero KBDM es un paralelogramo.

Por lo tanto, $KM = BD = n$. Pero $\angle KAM = \angle A + \angle C$.

Según el teorema de los cosenos para el $\triangle KAM$ tenemos:

$$n^2 = \left(\frac{a \cdot c}{m}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot d}{m}\right)^2 - 2 \left(\frac{a \cdot c}{m}\right) \left(\frac{b \cdot d}{m}\right) \cdot \cos(A + C), \text{ de donde se obtiene el resultado deseado:}$$

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A + C)$$

Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero; m y n , sus diagonales; A y C , dos ángulos opuestos. Entonces se cumple la relación $m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(A + C)$.

2.- Teorema de Tolomeo.

Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero inscrito y m y n , sus diagonales. Entonces $mn = ac + bd$

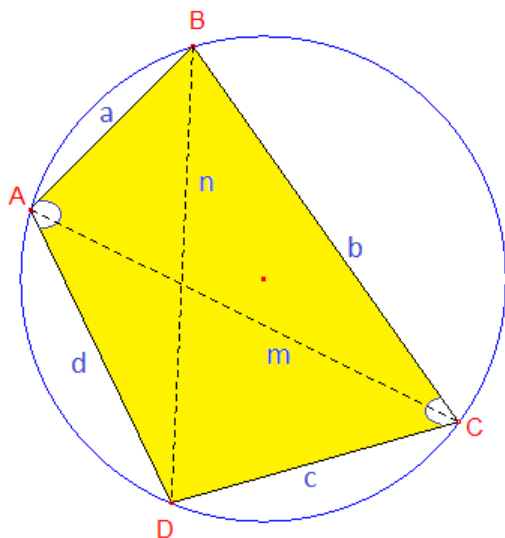
Dem. – La afirmación del teorema de Tolomeo es el corolario del teorema de Bretschneider, puesto que para el cuadrilátero inscrito la suma de los ángulos, $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

Por tanto, tenemos las siguientes relaciones:

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A + C)$$

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd \rightarrow$$

$$mn = ac + bd$$



3.- Teorema de Pompeiu.

Sea ABC un triángulo equilátero y M , un punto arbitrario del plano.

a) Si M se encuentra en la circunferencia circunscrita al triángulo, entonces $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$ (cte)

b) Si M no se encuentra en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , entonces existirá un triángulo, cuyos lados son iguales a MA, MB y MC .

Dem. – a) Si M pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC de lado l , se tiene que, el segmento mayor MC es igual a la suma de los otros dos. En el caso de la figura $MC = AM + MB$.

Para cerciorarnos de esta afirmación utilícese el teorema de Tolomeo para el cuadrilátero inscrito $AMBC$.

$$MC \cdot AB = AM \cdot BC + MB \cdot AC$$

$$MC \cdot l = AM \cdot l + MB \cdot l$$

$$MC = AM + MB$$

Aplicando el teorema de los cosenos al triángulo MAB , obtenemos que:

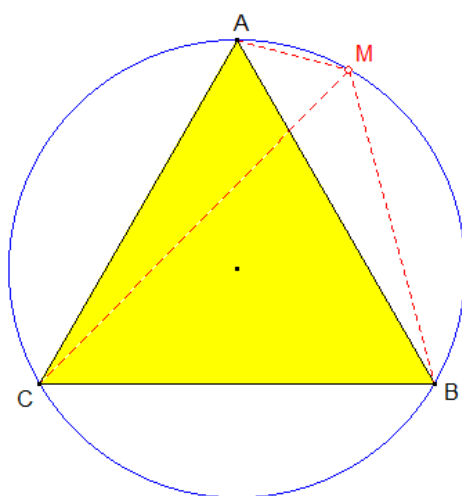
$$l^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos 120^\circ$$

$$l^2 = MA^2 + MB^2 + MA \cdot MB$$

Por tanto:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA^2 + MB^2 + (MA + MB)^2 = 2(MA^2 + MB^2 + MA \cdot MB) = 2l^2$$

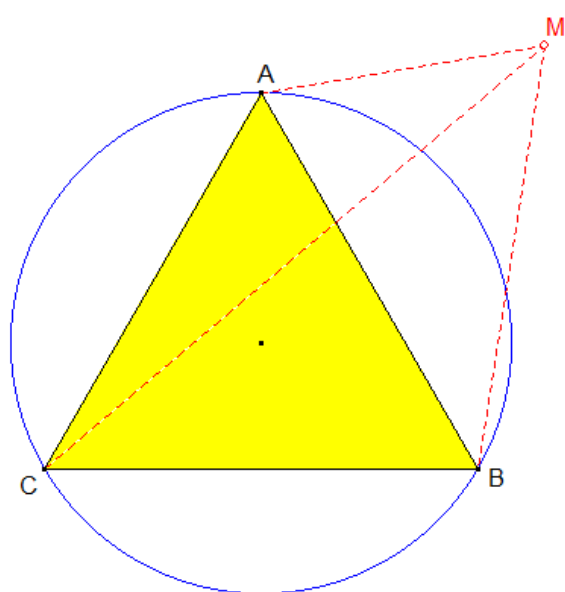
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2l^2$$



b1) Si M es un punto exterior al triángulo ABC y MC es el mayor de los segmentos MA, MB, MC, entonces al aplicar el teorema de Bretschneider al cuadrilátero AMBC, obtenemos que:

$MC^2 \cdot l^2 = MA^2 \cdot l^2 + MB^2 \cdot l^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot l^2 \cdot \cos(\angle AMB + 60^\circ)$ de donde se tiene que $MC < MA + MB$, ya que al ser $\angle AMB \neq 120^\circ$ entonces:

$$-1 < \cos(\angle AMB + 60^\circ) \Rightarrow -2 \cdot \cos(\angle AMB + 60^\circ) < 2$$



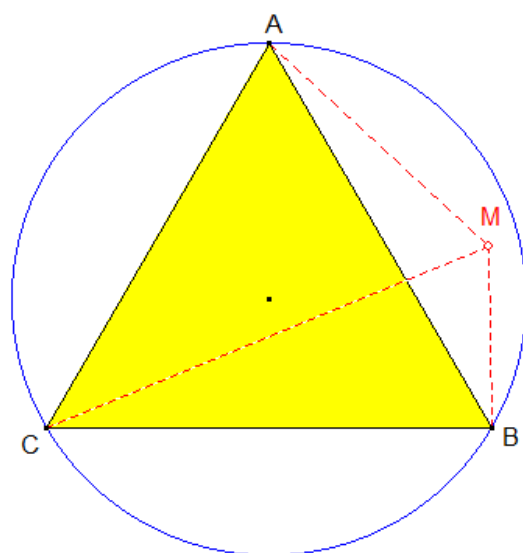
$$MC^2 \cdot l^2 < MA^2 \cdot l^2 + MB^2 \cdot l^2 + 2 \cdot MA \cdot MB \cdot l^2$$

$$MC^2 < MA^2 + MB^2 + 2 \cdot MA \cdot MB = (MA + MB)^2$$

$$MC < MA + MB$$

b2) Siendo M un punto interior al triángulo ABC, y además MC el mayor de los segmentos MA, MB y MC, se tendrá que $MC < l < MA + MB$.

Podemos pues, afirmar que, siendo M un punto cualquiera del plano que determina el triángulo equilátero ABC, y que no pertenezca a su circunferencia circunscrita, las longitudes MA, MB y MC son los lados de un triángulo, pues.



Ahora bien, en el caso de que M sea punto interior al triángulo ABC, este triángulo, llamado *triángulo de Pompeiu*, puede construirse explícitamente como se sigue a continuación.

Construcción del *Triángulo de Pompeiu*.

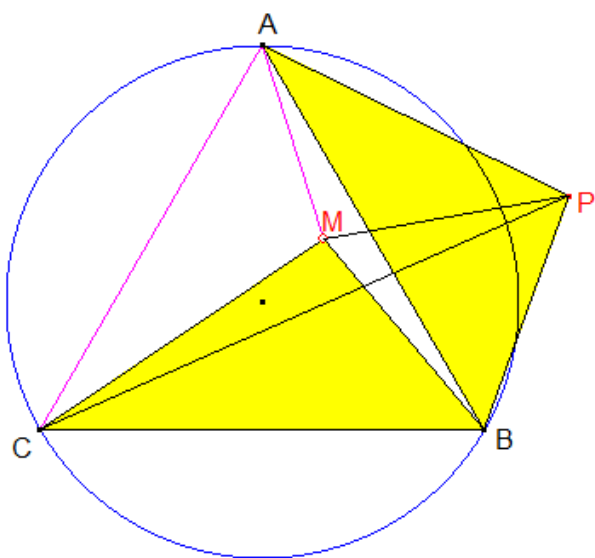
Dado el punto M, interior al triángulo ABC, construimos el punto P de modo que sea equilátero el triángulo MPB.

Consideramos los triángulos APB y MBC. Observamos en ellos las siguientes relaciones:

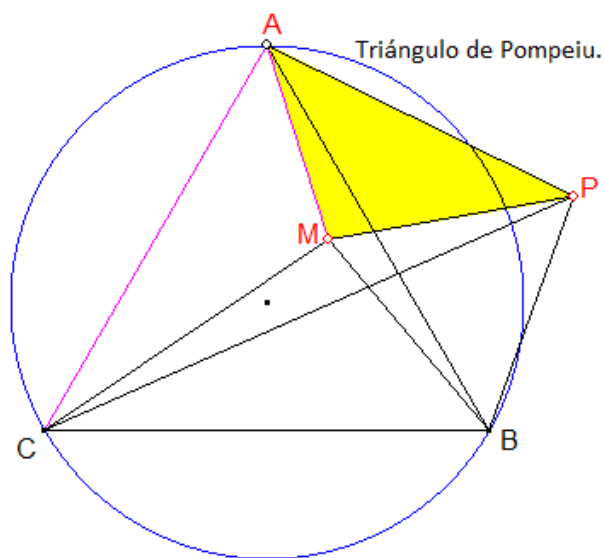
$$AB=BC; PB=MB; \angle MBC = 60^\circ - \angle ABM = \angle ABP$$

Por tanto, los triángulos APB y MBC son similares.

En definitiva, $AP=MC$.



Por tanto, los lados del triángulo AMP son, respectivamente las longitudes MA, MB (=MP) y MC (=AP). Este triángulo es el de *Pompeiu*.



4.- Triángulo de *Pompeiu*.

Sea ABC un triángulo equilátero y M, un punto interior a dicho triángulo. Sea AMP el triángulo de Pompeiu.

a) Los ángulos de dicho triángulo son iguales a $\angle BMC - 60^\circ$, $\angle CMA - 60^\circ$ y $\angle AMB - 60^\circ$.

b) El valor del área $S = [AMP]$ de dicho triángulo es $S = \frac{1}{3}[ABC] - \frac{\sqrt{3}}{4}MO^2$, donde O es el circuncentro del triángulo ABC.

Dem. –

a) En el triángulo AMP,

$$\angle AMP = \angle AMB - 60^\circ,$$

$$\angle MPA = \angle BPA - 60^\circ = \angle BMC - 60^\circ,$$

$$\angle MAP = 180^\circ - (\angle AMB - 60^\circ) - (\angle BMC - 60^\circ)$$

$$\angle MAP = 300^\circ - (\angle AMB + \angle BMC) = 300^\circ - (360^\circ - \angle AMC)$$

$$\angle MAP = \angle CMA - 60^\circ$$

b) En el triángulo AMP,

$$S = [AMP] = \frac{1}{2} AM \cdot MP \cdot \sin \angle AMP$$

$$S = [AMP] = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin \angle AMP$$

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin(\angle AMB - 60^\circ)$$

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot (\sin \angle AMB \cdot \cos 60^\circ - \cos \angle AMB \cdot \sin 60^\circ)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin \angle AMB - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} AM \cdot MB \cdot \cos \angle AMB$$

$$S = \frac{1}{2} [AMB] - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} AM \cdot MB \cdot \cos \angle AMB$$

Ahora bien,

$$AM \cdot MB \cdot \cos \angle AMB = \frac{AM^2 + MB^2 - AB^2}{2}$$

Entonces

$$S = \frac{1}{2} [AMB] - \frac{\sqrt{3}}{8} (AM^2 + MB^2 - AB^2)$$

De forma similar, obtendríamos las expresiones:

$$S = \frac{1}{2} [BMC] - \frac{\sqrt{3}}{8} (BM^2 + MC^2 - BC^2)$$

$$S = \frac{1}{2} [CMA] - \frac{\sqrt{3}}{8} (CM^2 + MA^2 - CA^2)$$

$$3S = \frac{1}{2} ([AMB] + [BMC] + [CMA]) - \frac{\sqrt{3}}{8} (AM^2 + MB^2 - BA^2 + BM^2 + MC^2 - BC^2 + CM^2 + MA^2 - CA^2)$$

$$3S = \frac{1}{2} [ABC] - \frac{\sqrt{3}}{8} (2(MA^2 + MB^2 + MC^2) - 3l^2)$$

Por la fórmula de Leibniz, que veremos a continuación,

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MG|^2 + \frac{1}{3} (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Ahora bien, ABC es un triángulo equilátero y por tanto, G=O (=Circuncentro). $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = 3l^2$

Además $[ABC] = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$. Así que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + l^2$ y por tanto,

$$3S = \frac{1}{2} [ABC] - \frac{\sqrt{3}}{8} (2(3MO^2 + l^2) - 3l^2) \Rightarrow 3S = \frac{1}{2} [ABC] - \frac{3\sqrt{3}}{4} MO^2 + \frac{\sqrt{3}}{8} l^2$$

$$3S = [ABC] - \frac{3\sqrt{3}}{4} MO^2 \Rightarrow S = \frac{1}{3} [ABC] - \frac{\sqrt{3}}{4} MO^2$$

Fórmula de Leibniz.

En un triángulo ABC, si G es el baricentro de dicho triángulo se verifica para cualquier punto M, la siguiente relación entre las longitudes de los siguientes segmentos:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3.MG^2 + \frac{1}{3} (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Dem. –

Vamos a obtener dicha fórmula usando el lenguaje vectorial. Para ello partimos de la definición de G, baricentro o centroide del triángulo ABC.

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA} \\ \vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB} \\ \vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GC} \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\vec{MA}|^2 + |\vec{MB}|^2 + |\vec{MC}|^2 = 3|\vec{MG}|^2 + |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})$$

$$|\vec{MA}|^2 + |\vec{MB}|^2 + |\vec{MC}|^2 = 3|\vec{MG}|^2 + |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2 \quad (I)$$

Ahora bien:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})^2 = 0 \Rightarrow |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2 + 2(\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}) = 0$$

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{GB} - \vec{GA} \\ \vec{BC} = \vec{GC} - \vec{GB} \\ \vec{CA} = \vec{GA} - \vec{GC} \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2 = 2(|\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2) - 2(\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA})$$

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2 = 2(|\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2) + |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2$$

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2 = 3(|\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2) \quad (II)$$

Uniendo (I) y (II), obtenemos, por fin:

$$|\vec{MA}|^2 + |\vec{MB}|^2 + |\vec{MC}|^2 = 3|\vec{MG}|^2 + |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2$$

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2 = 3(|\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2)$$

$$|\vec{MA}|^2 + |\vec{MB}|^2 + |\vec{MC}|^2 = 3|\vec{MG}|^2 + \frac{1}{3} \cdot (|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2)$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3.MG^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

5.- Problema.

Dado un triángulo ABC, con baricentro G.

a) Prueba que para cualquier punto del plano M se verifica:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2, \text{ obteniéndose la igualdad si y solamente si } M=G.$$

b) Sea fijado un número $k > GA^2 + GB^2 + GC^2$. Halla el L.G. de los puntos M tales que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$.

Sol:

a) Trivial, teniendo en cuenta la Fórmula de Leibniz.

b) Fijado un número $k > GA^2 + GB^2 + GC^2$, entonces para aquellos puntos M tales que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$, tenemos que, teniendo en cuenta la Fórmula de Leibniz $3.MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$3.MG^2 = k - (GA^2 + GB^2 + GC^2) = k' > 0$. Por lo que $MG^2 = k'' > 0$, reduciéndose el Lugar a una circunferencia centrada en el Baricentro G.