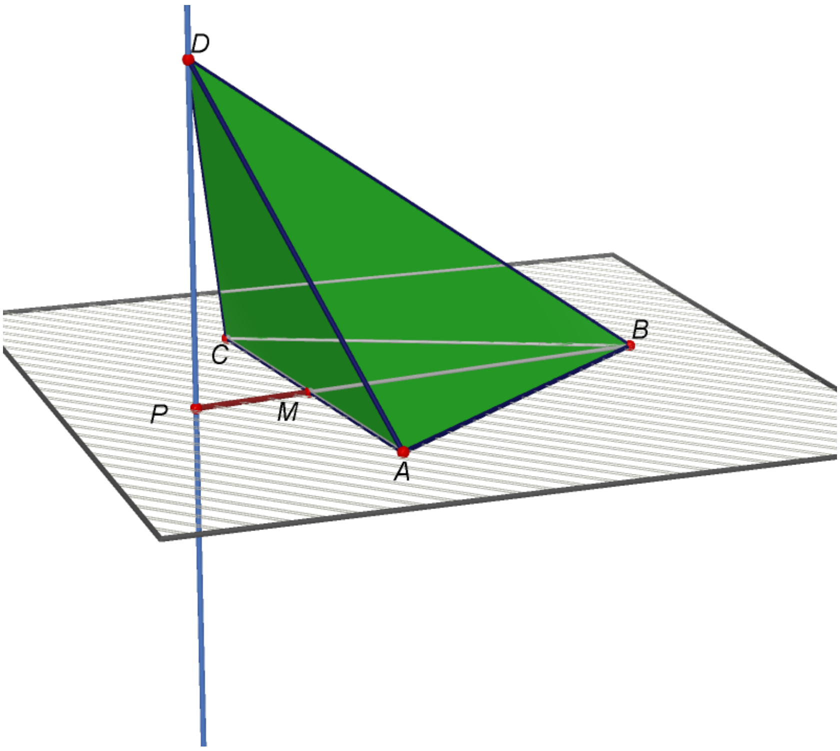
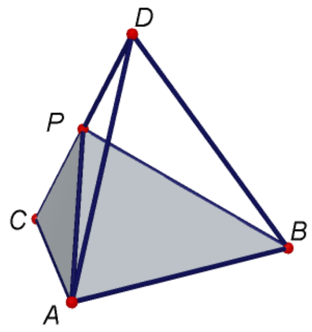
CUATRO TRIÁNGULOS

35 problemas de tetraedros

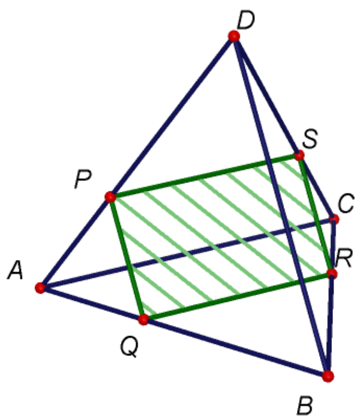


Ricard Peiró i Estruch

Problema 1
Sea el tetraedro regular ABCD.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{CD}$.
Determinar la proporción entre las áreas del tetraedro ABCP y el tetraedro regular ABCD.

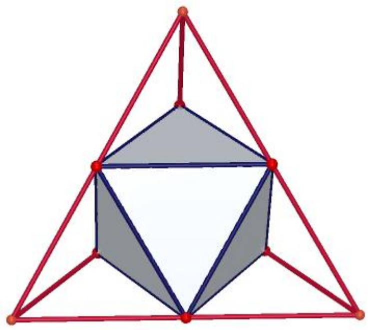


Problema 2
El perímetro de la sección paralela a dos aristas que se cruzan de un tetraedro regular es constante.
Calcular el perímetro.



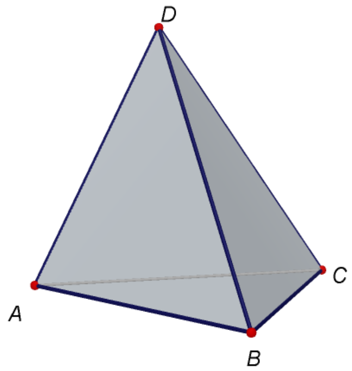
Problema 3
En una pirámide triangular regular la arista lateral es igual a tres veces la arista de la base.
Calcular el ángulo diedro de una arista lateral.

Problema 4
Probar que los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular son vértices de un octaedro regular.
Calcular la proporción entre los volúmenes del octaedro y el del tetraedro.

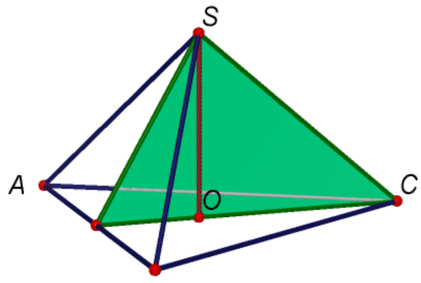


Problema 5
La base d'un tetraedro es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 8cm y la arista lateral sobre el ángulo recto de la base es perpendicular a la base y mide 5cm.
Calcular el área y el volumen del tetraedro.

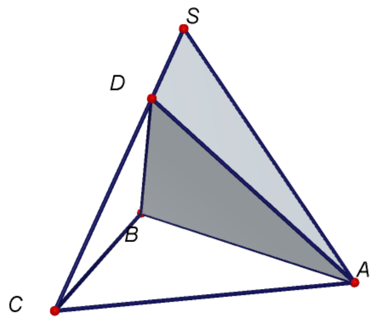
Problema 6
Un tetraedro está formado por dos triángulos equiláteros de lado a y dos triángulos rectángulos isósceles.
Calcular el área y el volumen.



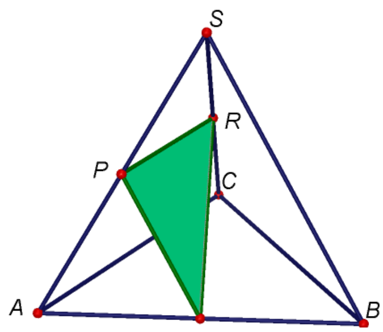
Problema 7
En la pirámide triangular regular ABCD el área de la sección que pasa por la arista lateral $\overline{SC}$ y la altura $\overline{SO}$ es la mitad del área de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ de la pirámide. La arista lateral es igual $\sqrt{21}$. Determinar el volumen de la pirámide y su área.



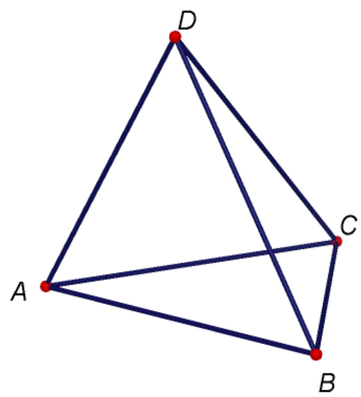
Problema 8
Sea ABCS un tetraedro regular de arista 4.
Sea D un punto de la arista $\overline{SC}$ tal que $\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$.
Determinar el volumen del tetraedro ABDS.



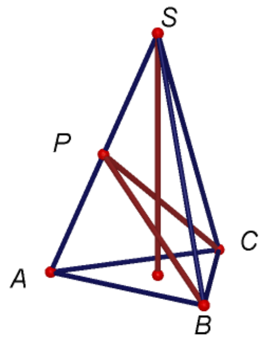
Problema 9
Sea el tetraedro regular ABCS de arista 6.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{SA}$.
Sea Q el punto medio de la arista $\overline{AB}$.
Sea R el punto medio de la arista $\overline{SC}$.
Determinar el área del triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$.



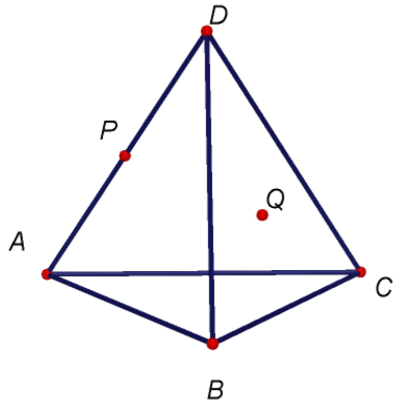
Problema 10
La base de una pirámide es un triángulo equilátero de lado a. Una de las caras laterales, perpendicular al plano de la base, también es un triángulo equilátero.
Determinar el área y el volumen de la pirámide.



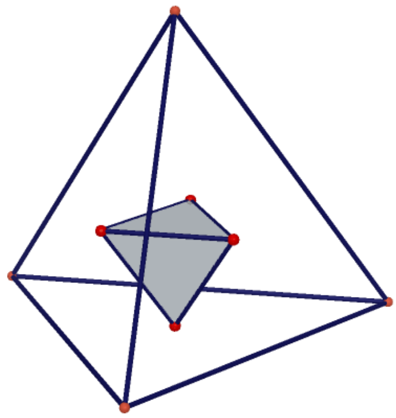
Problema 11
Una pirámide ABCS (S el vértice) triangular regular la arista de la base es 3 y la altura 4.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{AS}$.
Calcular la medida del ángulo $\angle BPC$.



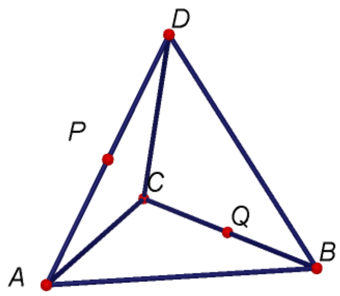
Problema 12
Sea el tetraedro regular ABCD.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{AD}$.
Sea Q el centro de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Calcular la proporción $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Problema 13
Determinar la proporción entre los volúmenes de un tetraedro regular y su dual (dual es aquel que tiene por vértice los centros de las caras del primero).



Problema 14
Sea el tetraedro regular ABCD.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{AD}$.
Sea Q el punto medio de la arista $\overline{BC}$.
Calcular la proporción $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Problema 15
En una pirámide triangular regular el ángulo diedro de la base es igual a φ.
Determinar el ángulo formado por dos aristas laterales en el vértice de la pirámide.

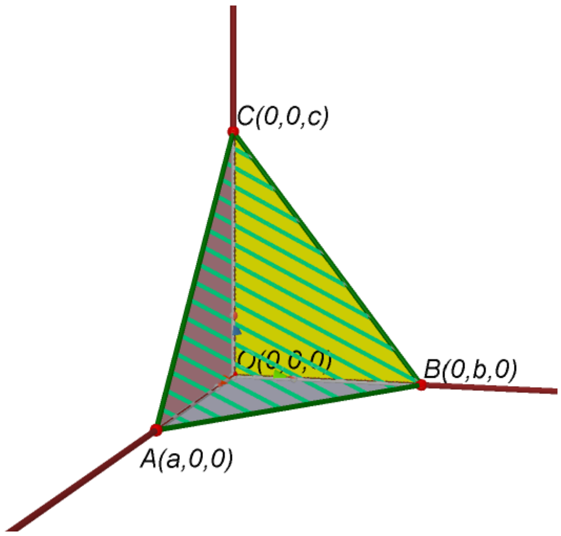
Problema 16
La altura de una pirámide triangular regular es 4 veces el radio de la circunferencia inscrita a la base. El volumen es 36.
Determinar la medida de la arista de la base:

Problema 17
Una pirámide regular de base triangular tiene altura 6 y volumen $72\sqrt{3}$.
Determinar el radio de la esfera inscrita a la pirámide.

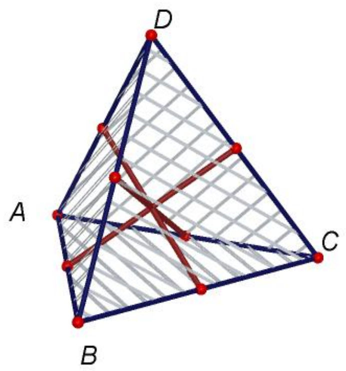
Problema 18
Un plano secante paralelo a la base de una pirámide regular triangular divide por la mitad el área lateral de la pirámide. Determinar la proporción entre los segmentos en los que queda dividida la altura de la pirámide por el plano secante.

Problema 19
En una pirámide triangular regular, por la arista de la base de longitud a, se traza una sección perpendicular a la arista lateral opuesta. Determinar la superficie de la pirámide si el plano secante divide la arista lateral en la razón $m:n$ contando desde el vértice de la pirámide.

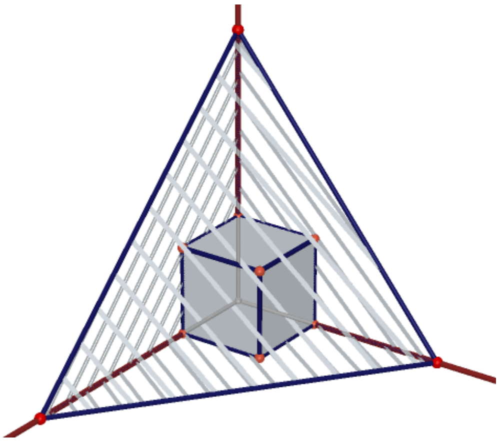
Problema 20
Consideremos el sistema de referencia afín
$\{O; \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}\}$
Sean los puntos $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.
Sean las áreas: $P = S_{OAB}$, $Q = S_{OAC}$, $R = S_{OBC}$, $S = S_{ABC}$.
Probar que $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$.



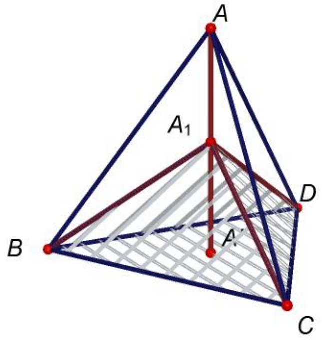
Problema 21
Sea un tetraedro cualquiera.
a) Los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas se intersectan en un punto.
b) La suma de los cuadrados de las aristas es cuatro veces la suma de los cuadrados de los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas.



Problema 22
Las aristas de una pirámide triangular que salen del vértice A son perpendiculares a pares y miden a, b, c. Determinar el volumen del cubo inscrito en la pirámide tal que uno de sus vértices es A.



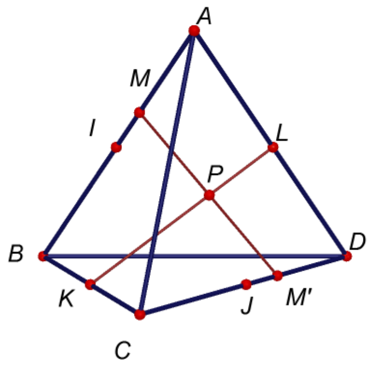
Problema 23
Sea el tetraedro regular ABCD de arista a.
Sea A’ la proyección de A sobre la base $\overset{\Delta}{BCD}$.
Sea A_1 el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.
Probar que el tetraedro A_1BCD tiene tres caras triángulos rectángulos.



Problema 24
La suma de los cuadrados de todas aristas de una pirámide triangular regular es P. Determinar el área máxima de una cara lateral.

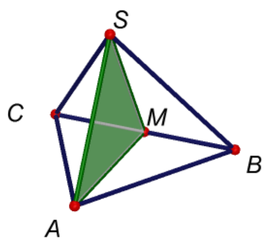
Problema 25
a) Calcular el volumen máximo de una pirámide regular triangular inscrita en una esfera de radio R.
b) Calcular el valor máximo de la suma de aristas de una pirámide regular triangular inscrita en una esfera de radio R.

Problema 26
Sea el tetraedro ABCD.
Siguen I, J, K, L los puntos medios de aristas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, respectivamente.
a) Demostrar que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\cdot\overrightarrow{JK}$.
b) Demostrar que para a cada punto O del segmento $\overline{KL}$ existen los puntos M y M’ de las aristas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ tal que P es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$.



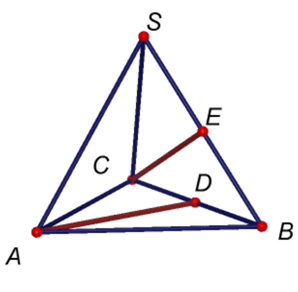
Problema 27

Sea la pirámide ABCS de base el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$
La sección producida en la pirámide ABCS por un plano que pasa por el vértices S y A, y por el punto medio M de la arista de la base $\overline{BC}$ es un triángulo equilátero de lado 6cm. Calcular el área y el volumen de la pirámide.



Problema 28
La suma de distancias de un punto interior de un tetraedro regular a las caras es igual a la altura del tetraedro.

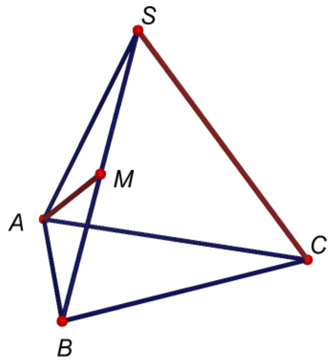
Problema 29
En el tetraedro regular ABCS, $\overline{AD}$ es la mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, E es el punto medio de la arista $\overline{BS}$.
Determinar el ángulo que forman las rectas AD, CE.



Problema 30

En el tetraedro regular ABCS, $\overline{AM}$ es la mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABS}$.

Determinar el ángulo que forman las rectas AM, CS.



Problema 31

Sea ABCS un tetraedro regular.

Calcular el ángulo que forman la arista $\overline{AB}$ y la cara $\overset{\Delta}{ACS}$.

Problema 32

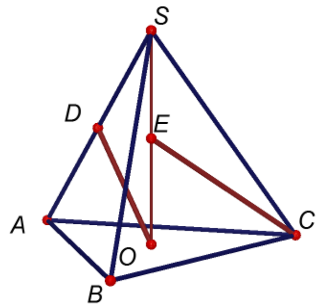
En el tetraedro regular ABCS, por la mediana $\overline{AD}$ de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ y K el punto medio de la arista $\overline{SB}$, se ha dibujado un plano. Determinar el ángulo de este plano y la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

Problema 33

Sea D el punto medio de la arista $\overline{AS}$ del tetraedro regular ABCS.

Sea E el punto medio de la altura $\overline{OS}$.

Determinar el ángulo de las rectas CE y DO.

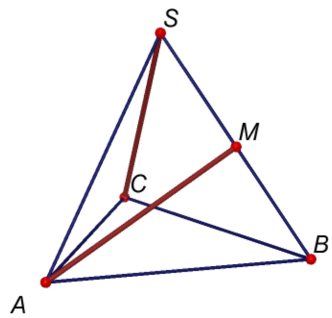


Problema 34

Sea ABCD un tetraedro regular.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{BS}$.

Calcular el ángulo de la mediana $\overline{AM}$ y la arista $\overline{CS}$.



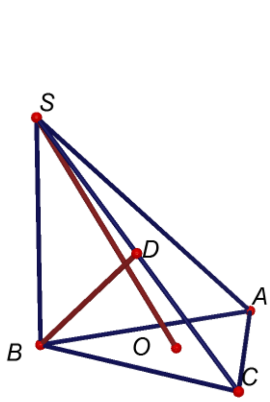
Problema 35

En la pirámide triangular ABCS la base $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo equilátero y las caras $\overset{\Delta}{SAB}$ i $\overset{\Delta}{SBC}$ son perpendiculares a la base.

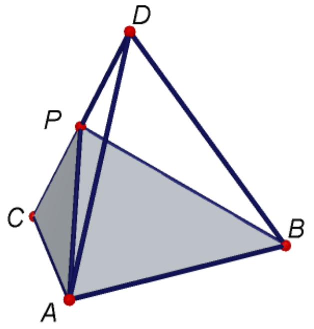
Sea la arista $\overline{SB}$ igual a la arista $\overline{AB}$.

Sea O el baricentro de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea D el punto medio de la arista $\overline{SC}$.

Calcular el ángulo que forman las rectas BD y SO.

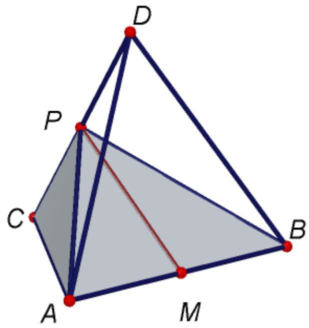


Problema 1
Sea el tetraedro regular ABCD.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{CD}$.
Determinar la proporción entre les áreas del tetraedro ABCP y el tetraedro regular ABCD.



Solución:
Sea $\overline{AB}=a$ arista del tetraedro regular ABCD:.
El área del tetraedro regular ABCD es:

$$S_{ABCD}=4\cdot S_{ABC}=4\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=a^2\sqrt{3}$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $A\overset{\Delta}{P}C$:

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $A\overset{\Delta}{M}P$:

$$\overline{MP}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

El área del tetraedro ABCP es igual a la suma de las áreas de los triángulos $A\overset{\Delta}{B}C$, $A\overset{\Delta}{P}C$, $B\overset{\Delta}{P}C$ y $A\overset{\Delta}{P}B$:

$$S_{ABCP}=S_{ABC}+2\cdot S_{APC}+S_{APB}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+2\left(\frac{\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}\right)+\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}a^2.$$

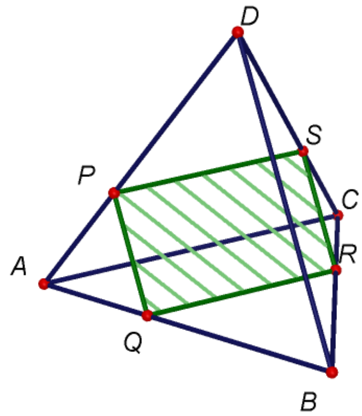
La proporción entre les áreas del tetraedro ABCP y el tetraedro regular ABCD es:

$$\frac{S_{ABCP}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}a^2}{a^2\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{12}\approx 0.7041.$$

Problema 2

El perímetro de la sección paralela a dos aristas que se cruzan de un tetraedro regular es constante.

Calcular el perímetro.



Solución:

Sea ABCD el tetraedro regular de arista $\overline{AB} = a$.

Sea PQRS la sección del tetraedro $\overline{PS}, \overline{QS}$ paralelos a $\overline{AC}$, $\overline{PQ}, \overline{RS}$ paralelos a $\overline{BD}$.

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ son aristas que se cruzan.

Sea $x = \overline{AP}$, $\overline{PD} = a - x$.

$\overset{\Delta}{APQ}$, es un triángulo equilátero, entonces:

$\overline{PQ} = \overline{AP} = x$.

$\overset{\Delta}{PSD}$, es un triángulo equilátero, entonces:

$\overline{PS} = \overline{PD} = a - x$.

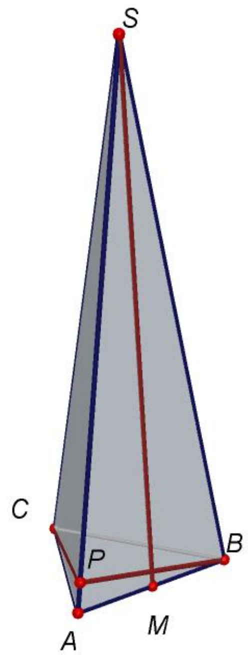
El perímetro de la sección es:

$p = 2\left(\overline{PQ} + \overline{PS}\right) = 2(x + a - x) = 2a$.

El perímetro de la sección es constante e igual al doble de la arista del tetraedro.

Problema 3
En una pirámide triangular regular la arista lateral es igual a tres veces la arista de la base.
Calcular el ángulo diedro de una arista lateral.

Solución:



Sea la pirámide recta ABCS, donde $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo equilátero.
Sea $\overline{AB} = a$, $\overline{AS} = 3a$.
Sea P de la arista $\overline{AS}$ tal que $\overline{BP} \perp \overline{AS}$.
El ángulo diedro que buscamos es $\angle BPC = \alpha$.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}a .$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AMS}$, $\overset{\Delta}{APB}$ son semejantes y la razón es 3:1.

Entonces, $\overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{MS} = \frac{\sqrt{35}}{6}a$.

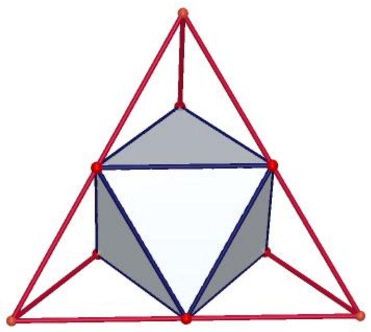
Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{35}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{35}}{6}\frac{\sqrt{35}}{6}\cos\alpha .$$

Simplificando:

$$\cos\alpha = \frac{17}{35}, \quad \alpha = \arccos\frac{17}{35} \approx 60º56'27'' .$$

Problema 4
Probar que los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular son vértices de un octaedro regular. Calcular la proporción entre los volúmenes del octaedro y el del tetraedro.

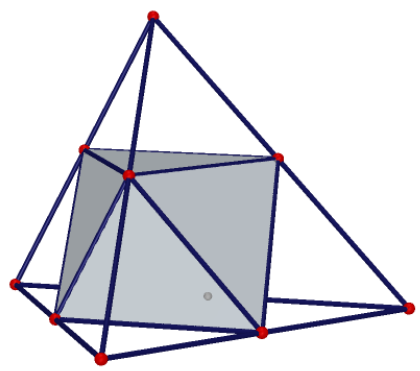


Solución:
Los puntos medios de las aristas que forman las caras forman 4 triángulos equiláteros de lado la mitad de la arista.
Los puntos medios de las aristas que se intersectan en un vértice forman 4 triángulos equiláteros de lado la mitad de la arista.
El poliedro resultante está formado por 8 caras triángulos equiláteros iguales 6 vértices y cada vértice de índice 4. El poliedro es un octaedro regular.

El truncamiento del tetraedro por la mitad de las aristas separa del tetraedro 4 tetraedros regular de arista la mitad de la arista del tetraedro inicial.
Cada uno de los 4 tetraedros tiene por volumen la octava parte del tetraedro inicial ya que están en proporción 1:2.

Entonces el volumen octaedro es la mitad del volumen tetraedro.

Problema
Probar que los puntos medios de las aristas de un tetraedro son vértices de un octaedro tal que las aristas opuestas son iguales y paralelas y el volumen del cual es igual a la mitad del volumen del tetraedro.

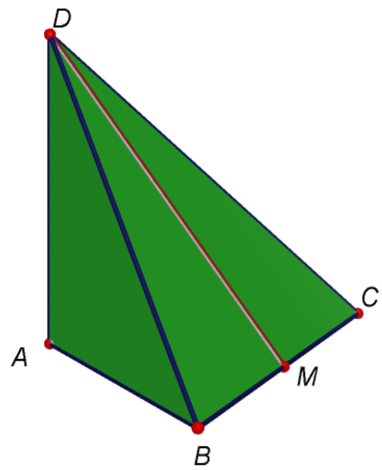


Problema 5
La base d'un tetraedro es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 8cm y la arista lateral sobre el ángulo recto de la base es perpendicular a la base y mide 5cm. Calcular el área y el volumen del tetraedro.

Solución:

Sea el tetraedro de base $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{BC} = 8$.
Sea $\overline{AD} = 5$, $\angle DAB = \angle DAC = 90^o$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{2}$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{57}$.



El triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$ es isósceles.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CMD}$:
$\overline{DM} = \sqrt{41}$.
El área del tetraedro ABCD es:
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} + S_{ABC} + S_{BCD}$.

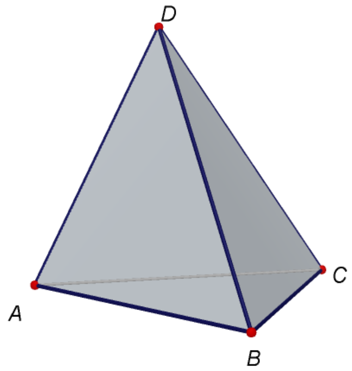
$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}}{2}.$$

$S_{ABCD} = 20\sqrt{2} + 16 + 4\sqrt{41} \approx 69.90 cm^2$.
El volumen del tetraedro es:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD}.$$

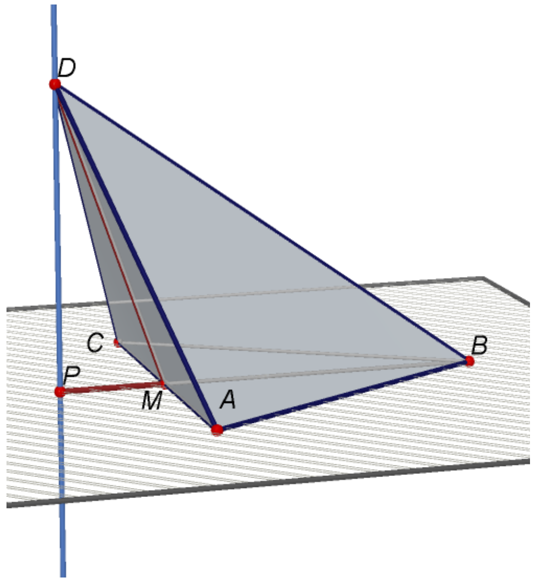
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} 16 \cdot 5 = \frac{80}{3} \approx 26.66 cm^3.$$

Problema 6
Un tetraedro está formado por dos triángulos equiláteros de lado a y dos triángulos rectángulos isósceles.
Calcular el área y el volumen.



Solución:

Sea el tetraedro ABCD tal que las caras $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ son triángulos equiláteros de lado a. Siguen $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ les caras que son triángulos rectángulos isósceles.



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD} = a$.
$\angle BAD = BCD = 90º$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{AD} = a\sqrt{2}$.
El área del tetraedro es:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{aBC} + 2 \cdot S_{ABD} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2.$$

Sea P la proyección de C sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{AC}$.
M pertenece al segmento $\overline{PB}$.
Sea $\overline{DP} = h$ altura del tetraedro. Sea $\overline{PM} = x$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PMD}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = x^2 + h^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PBD}$:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + h^2 \qquad (2)$$

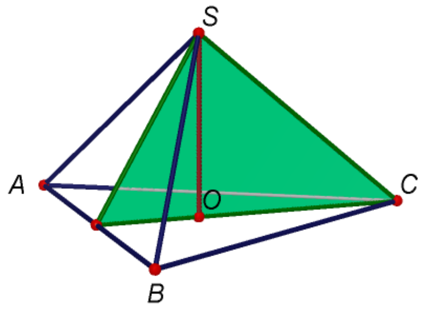
Consideremos el sistema formado por las expresiones (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a^2 = x^2 + h^2 \\ 2a^2 = x^2 + \frac{3}{4}a^2 + \sqrt{3}ax + h^2 \end{cases}. \text{ La solución es } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h = \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{cases}.$$

El volumen del tetraedro es:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Problema 7

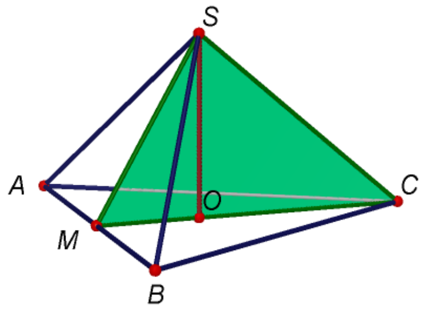


En la pirámide triangular regular ABCD el área de la sección que pasa por la arista lateral $\overline{SC}$ y la altura $\overline{SO}$ es la mitad del área de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ de la pirámide. La arista lateral es igual $\sqrt{21}$. Determinar el volumen de la pirámide y la su área.

Solución:

Sea $a = \overline{AB}$ arista de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ (triángulo equilátero).

Por ser la pirámide regular el pie de la altura $\overline{SO}$, es el baricentro del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BMC}$:

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Aplicando la propiedad del baricentro O:

$\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{COS}$:

$$\overline{SO} = \sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{21 - \frac{1}{3}a^2}.$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{CMS}$ (sección del plano que formen $\overline{SC}$ y la altura $\overline{SO}$ es:

$$S_{CMS} = \frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{SO} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{21 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{4}a\sqrt{63 - a^2}.$$

El área de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ es: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Como que el área del triángulo $\overset{\Delta}{CMS}$ es la mitad del área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\frac{1}{4}a\sqrt{63 - a^2} = \frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Resolviendo la ecuación:

$a = 6$. $\overline{SO} = 3$.

El volumen de la pirámide ABCS es: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{SO} = \frac{1}{3}\frac{6^2\sqrt{3}}{4}3 = 9\sqrt{3}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{SM} = \sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{21 - 3^2} = 2\sqrt{3}.$$

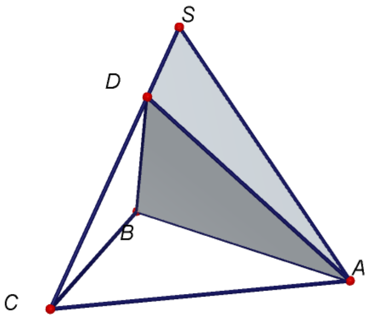
El área de la pirámide ABCS es: $S_{ABCS} = S_{ABC} + 3\cdot S_{ABS} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{6\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$.

Problema 8

Sea ABCS un tetraedro regular de arista 4.

Sea D un punto de la arista $\overline{SC}$ tal que $\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$.

Determinar el volumen del tetraedro ABDS.



Solución:

$\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$, $\overline{SC}=4$, Entonces:

$\overline{DC}=3$.

El volumen del tetraedro ABDS es igual al volumen del tetraedro regular ABCS menos el volumen del tetraedro ABCD.

Sea $\overline{SG}$ la altura del tetraedro regular ABCS. G es el baricentro de la cara base.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMC}$:

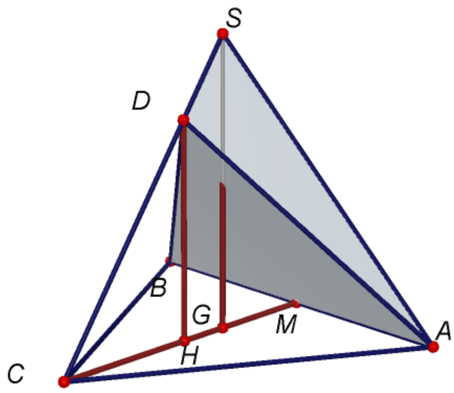
$\overline{CM}=2\sqrt{3}$.

Aplicando la propiedad del baricentro G.

$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CGS}$:

$$\overline{SG}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$



El volumen del tetraedro regular ABCS es:

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{SG}=\frac{1}{3}\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{CGS}$, $\overset{\Delta}{CHD}$ son semejantes y la razón de semejanza es $4:3$, entonces:

$\overline{DH}=\frac{3}{4}\overline{SG}=\sqrt{6}$.

El volumen del tetraedro ABCD es:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{DH}=\frac{1}{3}\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{6}=4\sqrt{2}.$$

El volumen del tetraedro ABDS es:

$$V_{ABCD}=V_{ABCS}-V_{ABCD}=\frac{16}{3}\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Problema 9

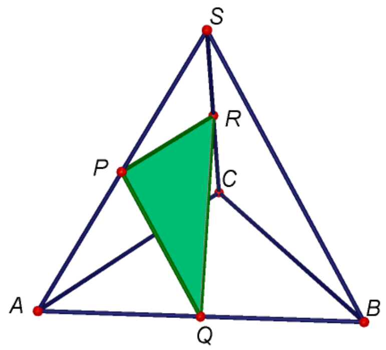
Sea el tetraedro regular ABCS de arista 6.

Sea P el punto medio de la arista $\overline{SA}$.

Sea Q el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Sea R el punto medio de la arista $\overline{SC}$.

Determinar el área del triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$.



Solución:

$\overline{PQ}$ es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{SB} = 3$.

$\overline{PR}$ es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{ACS}$. $\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 3$.

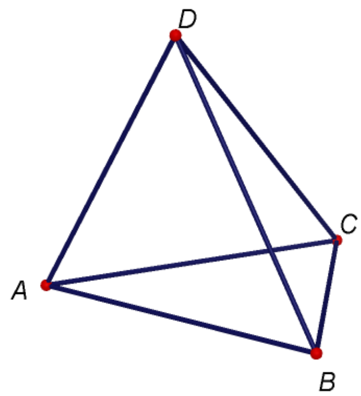
El ángulo $\angle RPQ$ es igual al ángulo que formen $\overline{AC}$ y $\overline{SB}$ que es recto.

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$ es rectángulo e isósceles.

$S_{PQR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \frac{9}{2}$.

Problema 10

La base de una pirámide es un triángulo equilátero de lado a. Una de las caras laterales, perpendicular al plano de la base, también es un triángulo equilátero. Determinar el área y el volumen de la pirámide.



Solución:

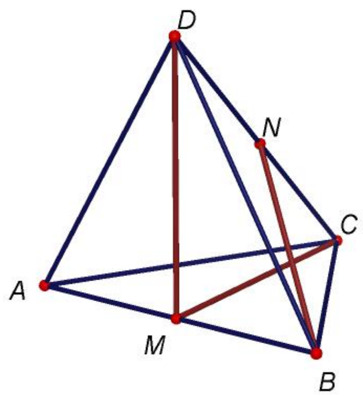
Sea la pirámide ABCD de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triángulo equilátero, $\overline{AB} = a$.

Sea $\overset{\Delta}{ABD}$ la cara lateral perpendicular a la base y triángulo equilátero.

El área de los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ es:

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMD}$:



$$\overline{DM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ es altura de la pirámide.

El volumen es:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{DM} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{8}a^3.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{DMC}$:

$$\overline{CD} = \overline{CM}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Los triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ son iguales e isósceles.

Sea N el punto medio de la arista $\overline{CD}$.

$\overline{CN} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. $\angle BNC = 90^{o}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BNC}$:

$$\overline{BN} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a.$$

El área de los triángulos $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ es:

$$S_{BCD} = S_{ACD} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{BN}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{4}a}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}a^2.$$

El área de la pirámide es:

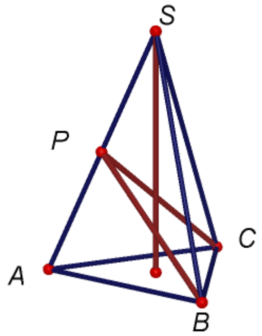
$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} + 2S_{BCD} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{\sqrt{15}}{8}a^2 = \frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{15}\right).$$

Problema 11

Una pirámide ABCS (S el vértice) triangular regular la arista de la base es 3 y la altura 4.

Sea P el punto medio de la arista $\overline{AS}$.

Calcular la mide del ángulo $\angle BPC$.



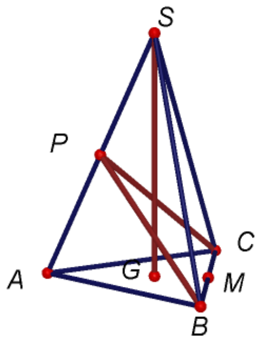
Solución:

La base $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo equilátero de lado $\overline{AB} = 3$.

Sea G el baricentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

La altura de la pirámide es $\overline{SG} = 4$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando la propiedad del baricentro G:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \sqrt{3}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AGS}$:

$$\overline{AS} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{19}.$$

$$\overline{AS} = \overline{BS}$$

La mediana $\overline{BP}$ del triángulo $\overset{\Delta}{ABS}$ mide: $\overline{BP} = \dfrac{\sqrt{2\overline{BS}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{AS}^2}}{2}$:

$$\overline{BS} = \frac{\sqrt{2 \cdot 19 + 2 \cdot 9 - 19}}{2} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

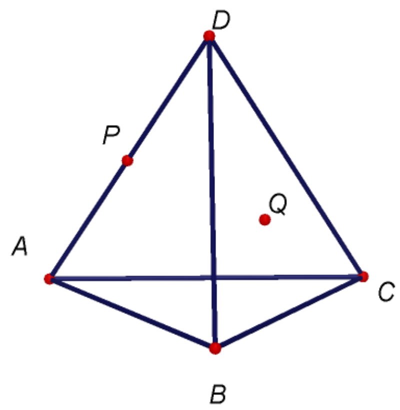
Sea $\alpha = \angle BPC$, aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{BPC}$:

$3^2 = \left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - 2\dfrac{\sqrt{37}}{2}\dfrac{\sqrt{37}}{2}\cos\alpha$. Simplificando:

$$\cos\alpha = \frac{19}{37}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{19}{37} \approx 59º6'7''.$$

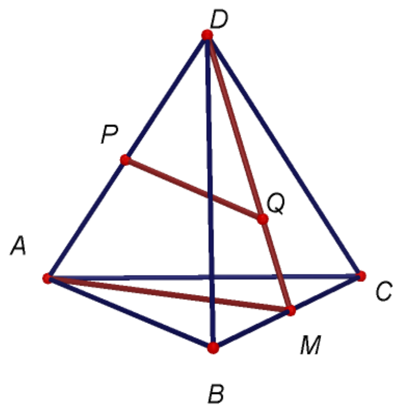
Problema 12
Sea el tetraedro regular ABCD.
Sea P el punto medio de la arista $\overline{AD}$.
Sea Q el centro de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Calcular la proporción $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Solución:
Sea $a = \overline{AB}$ arista del tetraedro regular.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.

$$\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Sea $\alpha = \angle ADM$.



Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos\alpha$$. Simplificando:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicando la propiedad del baricentro Q del triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\overline{DQ} = \frac{2}{3}\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{PQD}$:

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Simplificando:

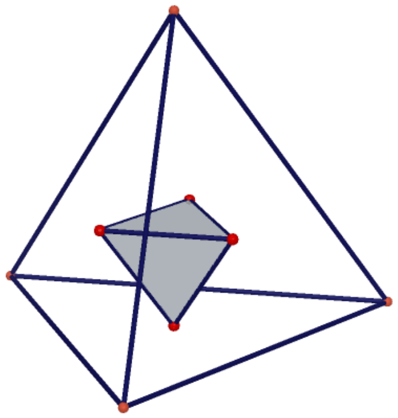
$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}a.$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$$

Notemos que el triángulo $\overset{\Delta}{DPQ}$ es isósceles, entonces, los triángulos $\overset{\Delta}{DPQ}$, $\overset{\Delta}{AMD}$ son semejantes y la razón de semejanza es $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 13

Determinar la proporción entre los volúmenes de un tetraedro regular y su dual (dual es aquel que tiene por vértice los centros de las caras del primero).



Solución:

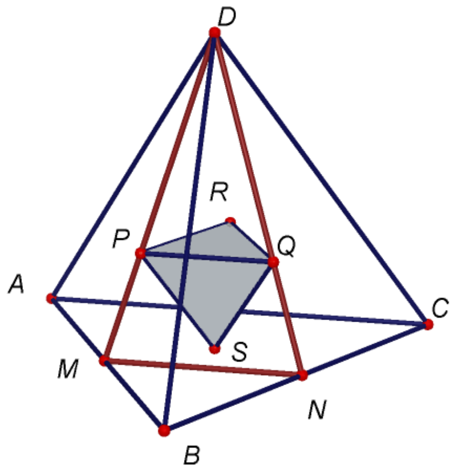
Sea el tetraedro regular ABCD de arista $a = \overline{AB}$.

Sea PQRS el tetraedro dual, P centro de la cara $\overset{\Delta}{ABD}$ y Q centro de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.

Los dos tetraedros regulares son semejantes, la proporción entre los volúmenes es el cubo de la proporción de sus aristas.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Sea N el punto medio de la arista $\overline{BC}$.



$\overline{MN}$ es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, entonces:

$\overline{MN} = \dfrac{a}{2}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{MDN}$, $\overset{\Delta}{PDQ}$ son semejantes.

Por la propiedad del baricentro P del triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$.

$\dfrac{\overline{DP}}{\overline{DM}} = \dfrac{2}{3}$, entonces:

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \dfrac{2}{3}$.

Por tanto, $\overline{PQ} = \dfrac{2}{3}\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{3}a$.

$$\frac{V_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

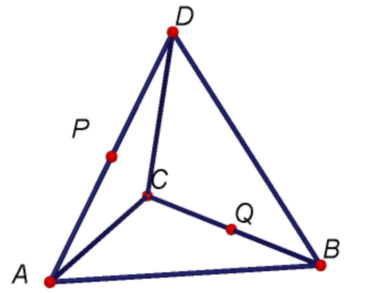
Problema 14

Sea el tetraedro regular ABCD.

Sea P el punto medio de la arista $\overline{AD}$.

Sea Q el punto medio de la arista $\overline{BC}$.

Calcular la proporción $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Solución:

Sea $a = \overline{AB}$ arista del tetraedro regular.

El pie de la altura del tetraedro regular sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ es el baricentro G del triángulo equilátero.

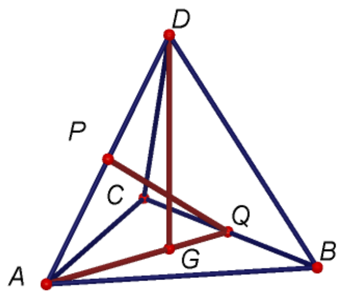
Sea $\alpha = \angle DAQ$.

$\overline{AQ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicando la propiedad del baricentro G:

$\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\overline{AQ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AGD}$;



$\cos\alpha = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Simplificando:

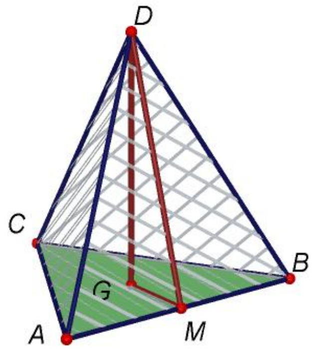
$\overline{PQ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Notemos que el triángulo $\overset{\Delta}{APQ}$ es rectángulo ya que $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$.

Problema 15
En una pirámide triangular regular el ángulo diedro de la base es igual a φ.
Determinar el ángulo formado por dos aristas laterales en el vértice de la pirámide.

Solución:
La pirámide es triangular regular, es decir, la base es un triángulo equilátero y es recta.
Sea ABCD la pirámide triangular regular, de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triángulo equilátero.
Sea G el pie de la altura. G es el baricentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.
Sea $a = \overline{AB}$ arista de la base
Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$ de la base .



$$\overline{AM} = \frac{a}{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz:

$$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DGM}$:

$$\overline{DM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\cos\varphi}.$$

Sea $\alpha = \angle ADM$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADM}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6\cos\varphi}} = \sqrt{3}\cos\varphi.$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right).$$

El ángulo formado por dos aristas laterales en el vértice de la pirámide es:

$$2\alpha = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right).$$

Problema 16

La altura de una pirámide triangular regular es 4 veces el radio de la circunferencia inscrita a la base. El volumen es 36.

Determinar la medida de la arista de la base:

Solución:

Sea ABCS la pirámide de base el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Sea O el incentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea $r = \overline{OM}$ radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

La altura de la pirámide es $\overline{OS} = 4r$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMO}$:

$\overline{AM} = r\sqrt{3}$.

$\overline{AB} = 2r\sqrt{3}$.

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3}\frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{4}\overline{OS}.$$

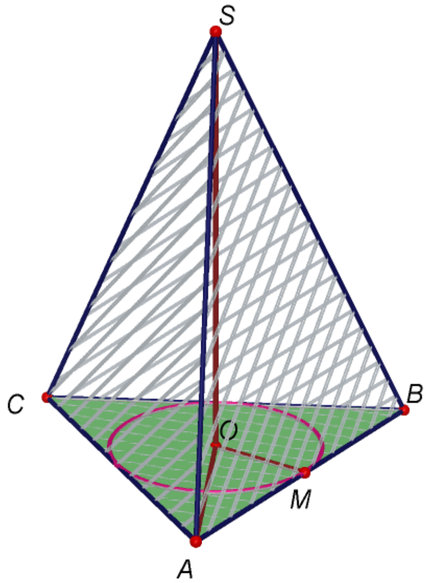
$$\frac{1}{3}\frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}4r = 36.$$

$r^3 = 3\sqrt{3}$. Resolviendo la ecuación:

$r = \sqrt{3}$.

La arista de la base mide:

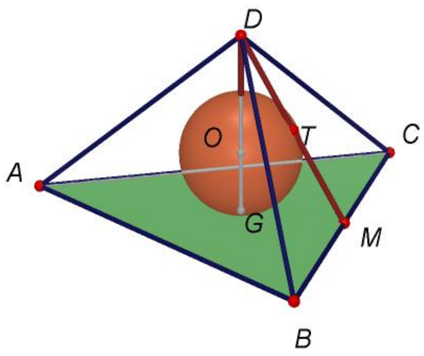
$\overline{AB} = 2r\sqrt{3} = 6$.



Problema 17

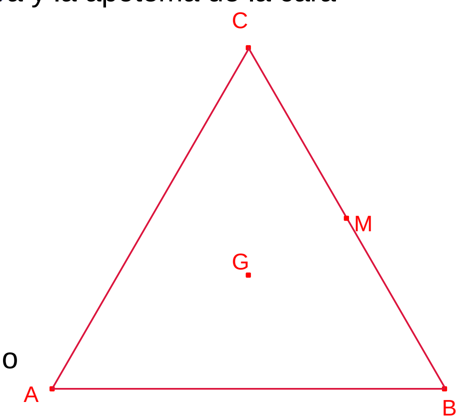
Una pirámide regular de base triangular tiene altura 6 y volumen $72\sqrt{3}$.
Determinar el radio de la esfera inscrita a la pirámide.

Solución:
La pirámide regular entonces, es recta y la base un triángulo equilátero.



Sea la pirámide ABCD de base el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.
La altura de la pirámide se intersecta en el baricentro G del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$.
El centro de O la esfera pertenece a la altura $\overline{DG}$.
El punto de tangencia T de la esfera y la cara $\overset{\Delta}{BCD}$ pertenece a la apotema $\overline{DM}$.
$\overline{OT}$ es perpendicular a la apotema $\overline{DM}$.
Sea $\overline{OT} = \overline{OG} = r$ radios de la esfera.

Sea la sección $\overset{\Delta}{GMD}$ de la pirámide que contiene la altura y la apotema de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.



Sea $a = \overline{AB}$, arista de la base.

$V_p = \frac{1}{3} S_b h$.

$V_p = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}6 = 72\sqrt{3}$. Resolviendo la ecuación:

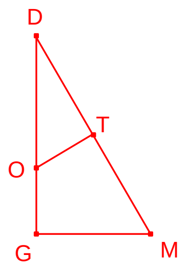
$a = 12$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM} = 6\sqrt{3}$.

Por la propiedad del baricentro:

$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = 2\sqrt{3}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DGM}$:

$\overline{DM} = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$.

$\overline{DM} = 4\sqrt{3}$.

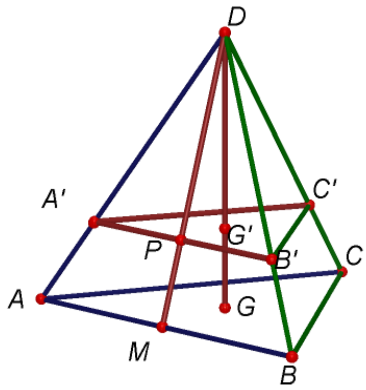
Los triángulos $\overset{\Delta}{DGM}$, $\overset{\Delta}{DTO}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{r}{6-r}$. Resolviendo la ecuación:

$r = 2$.

Problema 18
Un plano secante paralelo a la base de una pirámide regular triangular divide por la mitad el área lateral de la pirámide. Determinar la proporción entre los segmentos en los que queda dividida la altura de la pirámide por el plano secante.

Solución:



Sea la pirámide ABCD de base el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$.

El pie de la altura es el baricentro G del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.
El plano secante corta las aristas laterales de la pirámide en los puntos A', B', C', y la altura $\overline{DG}$ en el punto G'.

Queremos calcular $\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{G'G}}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{A'B'D}$ son semejantes y la razón de las áreas es 2:1.

Entonces, la razón de los lados es $\sqrt{2}:1$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

$\overline{A'B'}$ corta $\overline{DM}$ en el punto P.

$\overline{DM}:\overline{DP}=\sqrt{2}:1$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{DGM}$, $\overset{\Delta}{DG'P}$ son semejantes y la razón de semejanza es:

$\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DP}}=\sqrt{2}$.

Entonces, $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DG'}}=\sqrt{2}$. $\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\overline{DG'}}{\overline{G'G}}=\frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}-\overline{DG'}}=\frac{\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}}{1-\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=1+\sqrt{2}.$$

Problema 19

En una pirámide triangular regular, por la arista de la base de longitud a, se traza una sección perpendicular a la arista lateral opuesta. Determinar la superficie de la pirámide si el plano secante divide la arista lateral en la razón $m:n$ contando desde el vértice de la pirámide.

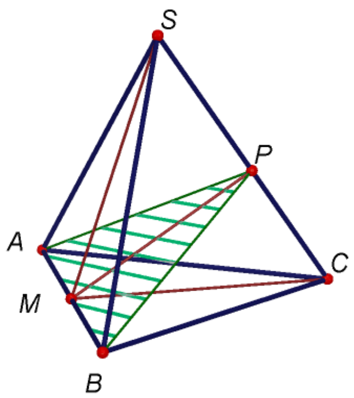
Solución:

Sea la pirámide regular triangular ABCS, de arista de la base $\overline{AB} = a$

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABP}$ sección por la arista $\overline{AB}$ perpendicular a la arista lateral $\overline{SC}$.

Sea $\overline{SP} = mx$, $\overline{PC} = nx$. $\overline{SB} = \overline{SC} = (m+n)x$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BMC}$:

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MPC}$:

$$\overline{MP}^2 = \frac{3}{4}a^2 - n^2x^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BMS}$:

$$\overline{MS}^2 = (m+n)^2x^2 - \frac{1}{4}a^2 \qquad (2)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MPS}$:

$$\overline{MP}^2 = \overline{MS}^2 - m^2x^2 \qquad (3)$$

Substituyendo l'expresión (2) en la expresión (3):

$$\overline{MP}^2 = (m+n)^2x^2 - \frac{1}{4}a^2 - m^2x^2 \qquad (4)$$

Igualando las expresiones (1) (4):

$$\frac{3}{4}a^2 - n^2 = (m+n)^2x^2 - \frac{1}{4}a^2 - m^2x^2.$$

Resolviendo la ecuación:

$$x^2 = \frac{a^2}{2n(m+n)} \qquad (5)$$

Substituyendo la expresión (5) en la expresión (2):

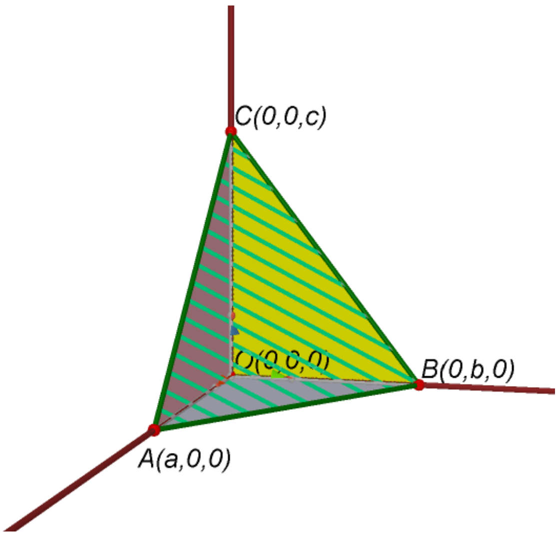
$$\overline{MS}^2 = (m+n)^2\frac{a^2}{2n(m+n)} - \frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{2m+n}{4n}\right)a^2 \qquad (6)$$

La superficie total de la pirámide ABCS es:

$$S_{ABCS} = S_{ABC} + 3\cdot S_{ABS} = S_{ABC} + 3\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MS}}{2}.$$

$$S_{ABCS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\cdot\frac{a\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2m+n}{n}}}{2} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} + 3\sqrt{\frac{2m+n}{n}}\right).$$

Problema 20



Consideremos el sistema de referencia afín $\{O; \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}\}$

Sean los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

Siguen les áreas: $P = S_{OAB}$, $Q = S_{OAC}$, $R = S_{OBC}$, $S = S_{ABC}$.

Probar que $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$.

Solución:

$\overset{\Delta}{OAB}$, $\overset{\Delta}{OAC}$, $\overset{\Delta}{OBC}$ son triángulos rectángulos.

$$P = S_{OAB} = \frac{1}{2}|ab|.$$

$$Q = S_{OAC} = \frac{1}{2}|ac|.$$

$$R = S_{OBC} = \frac{1}{2}|bc|.$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \frac{1}{4}\left((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2\right).$$

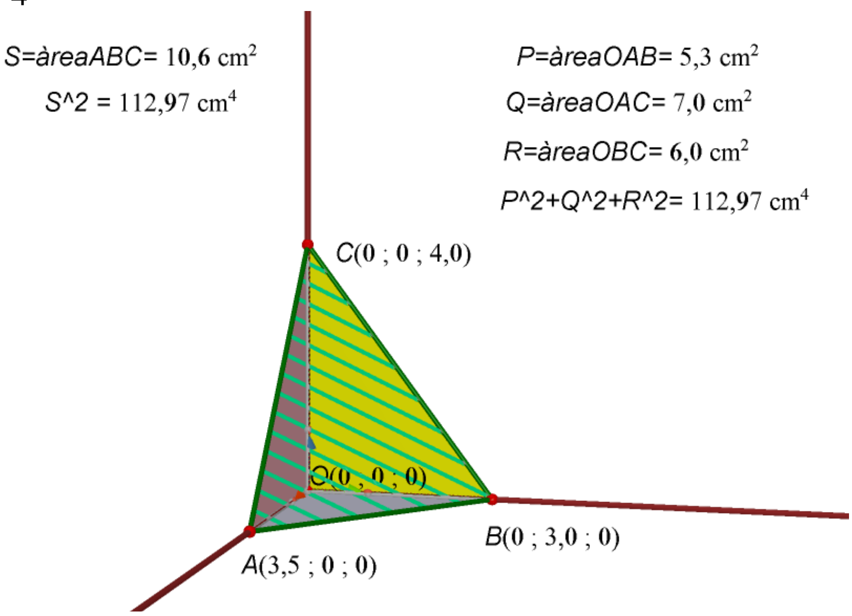
$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab).$$

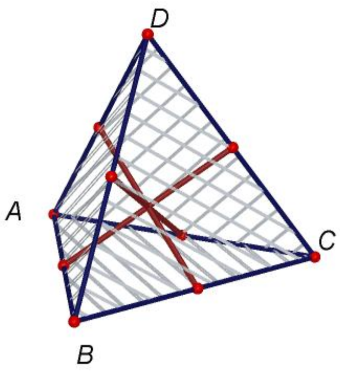
$$\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \|(bc, ac, ab)\| = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}.$$

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}.$$

$$S^2 = \frac{1}{4}\left((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2\right).$$

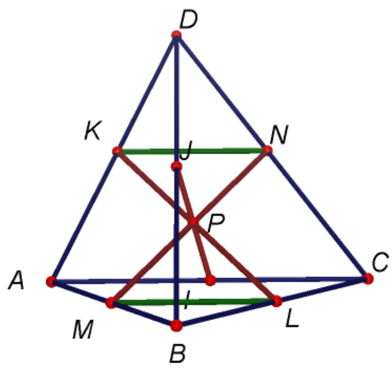


Problema 21
Sea un tetraedro cualquiera.
a) Los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas se intersectan en un punto.
b) La suma de los cuadrados de las aristas es cuatro veces la suma de los cuadrados de los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas.



Solución:

a)
Sean K y L los puntos medios de las aristas opuestas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
Sean M y N los puntos medios de las aristas opuestas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.
$\overline{KN}$ es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{ACD}$.
$\overline{ML}$ es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{ACB}$.
Entonces, MLNK es un paralelogramo.
Las diagonales $\overline{KL}$, $\overline{MN}$ del paralelogramo se intersectan en el punto medio de los dos segmentos.



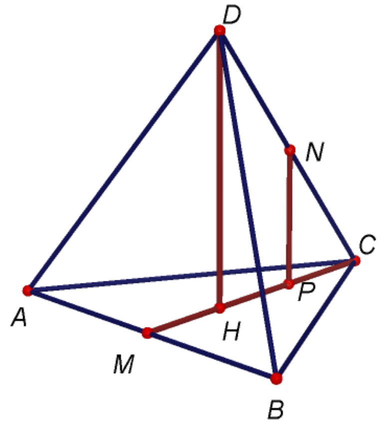
Análogamente, MINJ es un paralelogramo.
Por tanto, las diagonales $\overline{IJ}$, $\overline{MN}$ del paralelogramo se intersectan en el punto medio de los dos segmentos.
Entonces, los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas se intersectan en un punto, además, este punto es el punto medio de los tres segmentos.

b) **Solución para un tetraedro regular**
Sea el tetraedro regular ABCD d'arista $\overline{AB} = a$
Sea $\overline{DH}$ altura del tetraedro.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.
Sea N el punto medio de la arista $\overline{CD}$ opuesta a la arista $\overline{AB}$.
H es el baricentro del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{CM} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando la propiedad del baricentro: $\overline{CH} = \dfrac{2}{3}\overline{CM} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CHD}$: $\overline{DH} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$



Sea P la proyección de N sobre el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{CHD}$, $\overset{\Delta}{CPN}$ son semejantes y de razón 2:1.

Aplicando el teorema de Tales: $\overline{PN} = \dfrac{1}{2}\overline{DN} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$\overline{MP} = \overline{MH} + \overline{HP} = \dfrac{2}{3}\overline{MC} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MPN}$: $\overline{MN}^2 = \frac{1}{2}a^2$.

La suma de los cuadrados de las aristas del tetraedro equilátero ABCD es:
$6\overline{AB}^2 = 6a^2$.

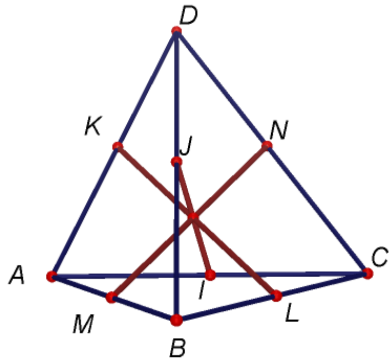
La suma de los cuadrados de los tres segmentos que unen los puntos medios de las aristas del tetraedro regular ABCD es: $3\overline{MN}^2 = 3\frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$.

Notemos que $6\cdot\overline{AB}^2 = 4\cdot 3\cdot\overline{MN}$.

Solución general

Sin pérdida de generalidad, sea el tetraedro ABCD con las siguientes coordenadas cartesianas.

$A(0, 0, 0)$, $B(b, 0, 0)$, $C(a, c, 0)$, $D(d, e, f)$.



$\overrightarrow{AB} = (b, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (a, c, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (a-b, c, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (d-b, e, f)$, $\overrightarrow{AD} = (d, e, f)$, $\overrightarrow{CD} = (d-a, e-c, f)$.

$\overline{AB}^2 = b^2$.

$\overline{AC}^2 = a^2 + c^2$.

$\overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab$.

$\overline{BD}^2 = b^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2bd$.

$\overline{AD}^2 = d^2 + e^2 + f^2$.

$\overline{CD}^2 = a^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2ad - 2ce$.

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right) - 2(ab + bd + ad + ce)$

Sean I y J los puntos medios de las aristas opuestas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente.
Sus coordenadas son:

$I\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}, 0\right)$, $J\left(\frac{b+d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{b+d-a}{2}, \frac{e-c}{2}, \frac{f}{2}\right)$.

$\overline{IJ}^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(bd - ce - ab - ad\right)$.

Sean K y L los puntos medios de las aristas opuestas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
Sus coordenadas son:

$K\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right)$, $L\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{KL} = \left(\frac{a+b-d}{2}, \frac{c-e}{2}, \frac{-f}{2}\right)$.

$\overline{KL}^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ab - ad - bd - ce\right)$.

Sean M y N los puntos medios de las aristas opuestas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.
Sus coordenadas son:

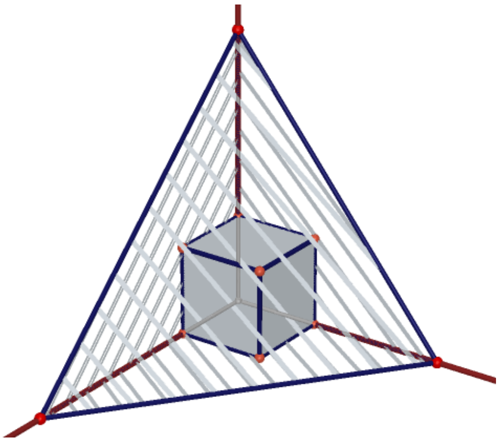
$M\left(\frac{b}{2}, 0, 0\right)$, $N\left(\frac{a+d}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{f}{2}\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a+d-b}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{f}{2}\right)$.

$\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad - ab - bd + ce\right)$.

$\overline{IJ}^2 + \overline{KL}^2 + \overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right) - 2(ab + bd + ad + ce)\right)$.

$4\left(\overline{IJ}^2 + \overline{KL}^2 + \overline{MN}^2\right) = 3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right) - 2(ab + bd + ad + ce)$.

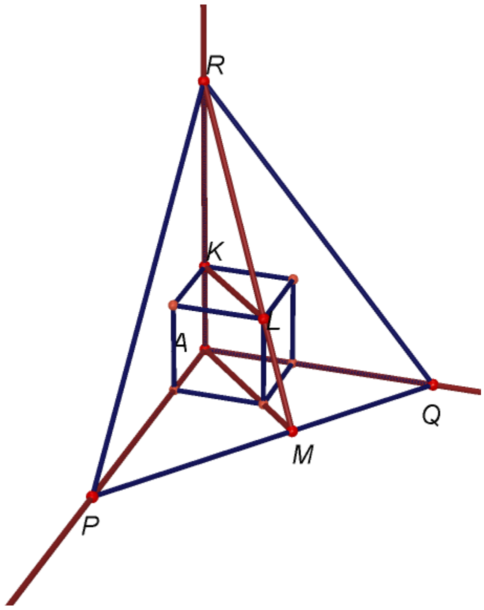
Problema 22
Las aristas de una pirámide triangular que salen del vértice A son perpendiculares a pares y miden a, b, c. Determinar el volumen del cubo inscrito en la pirámide tal que uno de sus vértices es A.



Solución:
Sea la pirámide triangular APQR, $\overline{AP} = a$, $\overline{AQ} = b$, $\overline{AR} = c$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{APQ}$:

$\overline{PQ} = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Sea K en la arista $\overline{AR}$ vértice del cubo inscrito en la pirámide.
Sea $\overline{AK} = x$, arista del cubo.
Sea $\overline{KL} = x\sqrt{2}$ diagonal de la cara superior del cubo.
La recta RL corta la arista $\overline{PQ}$ en el punto M.
$\angle PAM = 45^{o}$. AM es la bisectriz de $\angle PAQ$.
Aplicando la propiedad de la bisectriz al triángulo $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\frac{\overline{PM}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \overline{PM}}{b}.$$

$$\overline{PM} = \frac{a}{a+b}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\frac{\overline{PM}}{\sin 45^{o}} = \frac{\overline{AM}}{\sin \angle APM}.$$

$$\frac{\frac{a}{a+b}\sqrt{a^2 + b^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{AM}}{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

$$\overline{AM} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{MAR}$, $\overset{\Delta}{LKR}$ son semejantes, aplicando el teorema de Tales:

$\dfrac{x\sqrt{2}}{c-x} = \dfrac{\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{c}$. Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

El volumen del cubo es: $V_{cubo} = x^3 = \left(\dfrac{abc}{ab+bc+ca}\right)^3$.

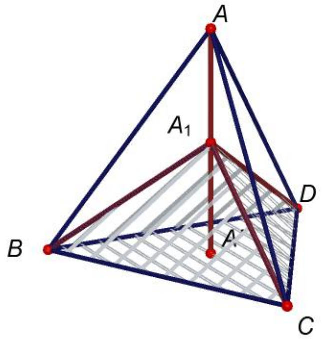
Problema 23

Sea el tetraedro regular ABCD de arista a.

Sea A’ la proyección de A sobre la base $\overset{\Delta}{BCD}$.

Sea A_1 el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

Probar que el tetraedro A_1BCD tiene tres caras triángulos rectángulos.



Solución:

Los triángulos $\overset{\Delta}{AA'B}$, $\overset{\Delta}{AA'C}$, $\overset{\Delta}{AA'D}$ son rectángulos y de hipotenusa a, entonces:

$$\overline{BA'} = \overline{CA'} = \overline{DA'} = \sqrt{a^2 - \overline{AA'}}.$$

Entonces, A’ es el circuncentro (también el baricentro) del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{BCD}$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{CD}$.

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Por la propiedad del baricentro:

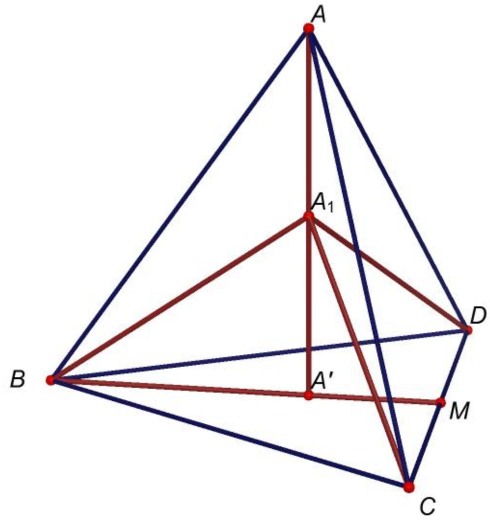
$$\overline{BA'} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BA'A}$:

$$\overline{AA'} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

$$\overline{A'A_1} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BA'A_1}$:



$$\overline{BA_1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \overline{DA_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Notemos que $\overline{BA_1}^2 + \overline{CA_1}^2 = \overline{BC}^2$. Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{BA_1C}$ es rectángulo.

Entonces, el tetraedro A_1BCD tiene tres caras triángulos rectángulos.

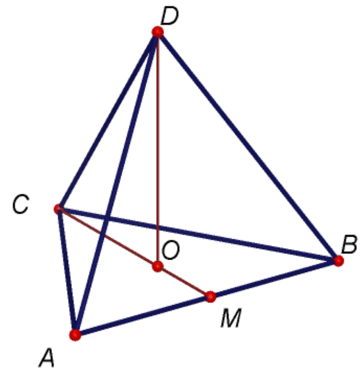
Problema 24
La suma de los cuadrados de todas aristas de una pirámide triangular regular es P. Determinar el área máxima de una cara lateral.

Solución:

Sea ABCD la pirámide triangular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triángulo equilátero.
Sea $\overline{AB} = a$ arista de la base. Sea $\overline{AD} = b$ arista lateral.
Per hipótesis $3\left(a^2 + b^2\right) = P$.

Sea O el baricentro de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMC}$:



$\overline{CM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a\,,\ \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\,.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{COD}$:

$$\overline{OD}^2 = b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DOM}$:

$$\overline{DM}^2 = \overline{OD}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2.\ \overline{SM}^2 = b^2 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}a^2.$$

$$\overline{DM}^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

El área de la cara lateral $\overset{\Delta}{ABD}$ es:

$$S(a,b) = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}\,.\quad b^2 = \frac{P}{3} - a^2.\ S(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{P}{3} - a^2 - \frac{1}{4}a^2}\,.$$

$$S(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}a^2 - \frac{5}{4}a^4}\,,\ a > 0\,.$$

El área máxima se alcanza en el máximo de la función $f(a) = \dfrac{P}{3}a^2 - \dfrac{5}{4}a^4$.

Derivemos la función f(a):

$$f'(a) = \frac{2P}{3}a - 5a^3.$$

$f'(a) = 0$, $\dfrac{2P}{3}a - 5a^3 = 0$. Resolviendo la ecuación: $a = \sqrt{\dfrac{2P}{15}}$.

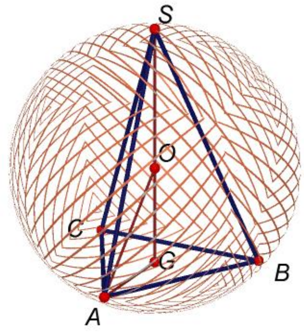
$$f''(a) = \frac{2P}{3} - 15a^2.\ f''\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right) = \frac{2P}{3} - 15\frac{2P}{5} = -\frac{14P}{3} < 0\,.$$

Entonces, el máximo se alcanza cuando $a = \sqrt{\dfrac{2P}{15}}$.

El área máxima es: $S\left(\sqrt{\dfrac{2P}{15}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{3}\left(\sqrt{\dfrac{2P}{15}}\right)^2 - \dfrac{5}{4}\left(\sqrt{\dfrac{2P}{15}}\right)^4} = \dfrac{P\sqrt{5}}{30}$.

Problema 25
a) Calcular el volumen máximo de una pirámide regular triangular inscrita en una esfera de radio R.
b) Calcular el valor máximo de la suma de aristas de una pirámide regular triangular inscrita en una esfera de radio R.

Solución:
Sea la esfera de centro O y radio R



Sea la pirámide ABCS de base el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$
Sea $\overline{AB} = a$, $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = b$.
Sea G el baricentro.
$\overline{OS} = \overline{OA} = R$. Sea $\alpha = \angle AOS$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{AOS}$

$$b^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\alpha.$$

$$b = R\sqrt{2 - 2\cos\alpha}.$$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOG}$.

$$a = R\sqrt{3}\sin\alpha.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AGS}$:

$$\overline{SG}^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} R\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2.$$

$$\overline{SG} = R\sqrt{2 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha}$$

a)
El volumen de la pirámide ABCS es:

$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \overline{SG}.$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4} 3R^2 \sin^2\alpha \cdot R\sqrt{2 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

$$V(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3 \sqrt{2\sin^4\alpha - 2\sin^4\alpha\cos\alpha - \sin^6\alpha}.$$

$$V'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3 \frac{8\sin^3\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^5\alpha - 6\sin^5\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{2\sin^4 - 2\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin^6\alpha}}.$$

$$V'(\alpha) = 0.$$

$8\sin^3\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^5\alpha - 6\sin^5\alpha\cos\alpha = 0$. Simplificando:

$$4\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 0.$$

$$4\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 0.$$

$$3\cos^3\alpha - 5\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1 = 0.$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{3}.$$

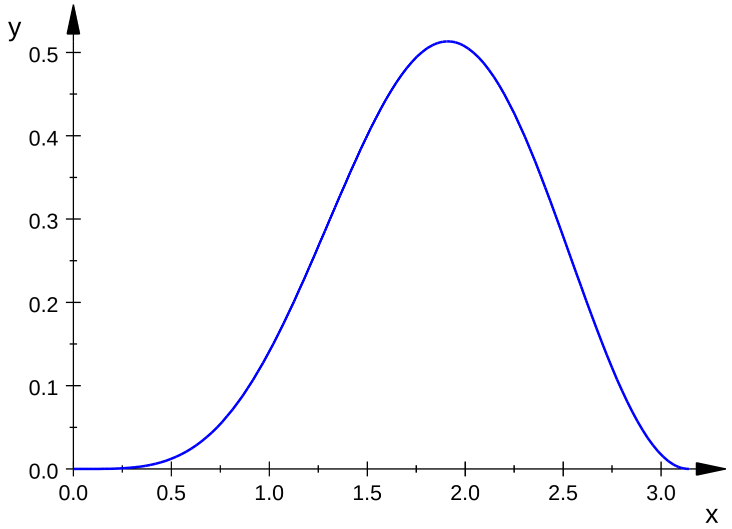
Estudiando el signo de la primera derivada:

$\cos\alpha = \frac{-1}{3}$ es un máximo relativo estricto.

$a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, es decir, es un tetraedro regular.

El volumen máximo es:

$$V\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 .$$



Gráfica para $R = 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\alpha}$.

b)

La suma de aristas es:

$$f(a,b) = 3a + 3b .$$

$$f(\alpha) = 3\left(\sqrt{3}R\cdot\sin\alpha + R\sqrt{2-2\cos\alpha}\right),\ \ \alpha\in[0,\pi] .$$

$$f'(\alpha) = 3R\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}}\right)$$

$$f'(\alpha) = 0 .$$

$$\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0 .$$

$$3\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} .$$

$3\cos^3\alpha - 7\cos^2\alpha + 1 = 0$. Resolviendo la ecuación:

$$\cos\alpha = \frac{-1}{3},\ \ \cos\alpha = \frac{1}{2} .$$

La solución $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ no es solución de $\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0$.

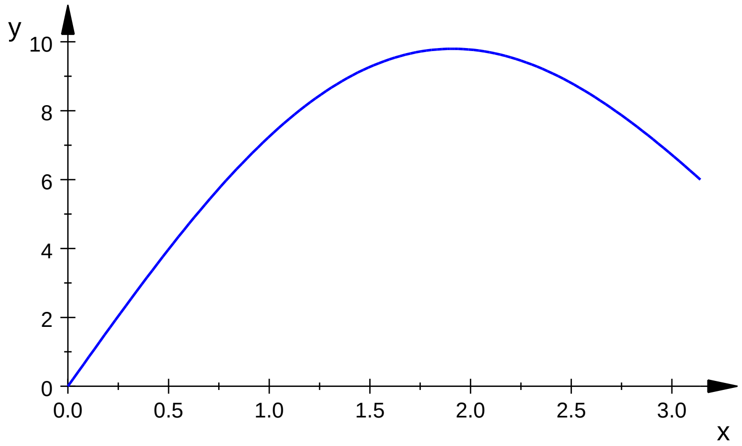
Estudiando el signo de la primera derivada:

$\cos\alpha = \frac{-1}{3}$ es un máximo relativo estricto.

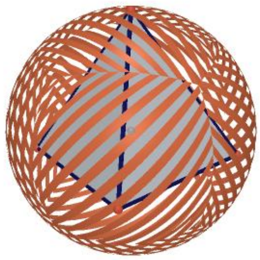
$a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, es decir, es un tetraedro regular.

La suma máxima es:

$$f\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = 4\sqrt{6}R\,.$$



Gráfica para a $R = 1$, $y = 3\left(\sqrt{3}\sin x + \sqrt{2 - 2\cos x}\right)$.



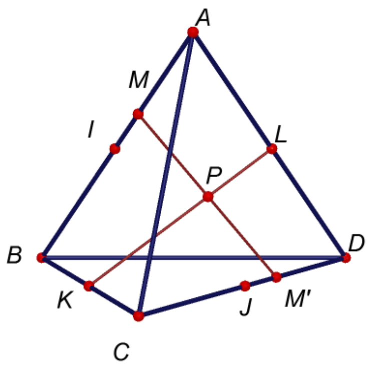
Problema 26

Sea el tetraedro ABCD.

Siguen I, J, K, L los puntos medios de aristas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, respectivamente.

a) Demostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$.

b) Demostrar que para a cada punto O del segmento $\overline{KL}$ existen los puntos M y M' de las aristas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ tal que P es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$.



Solución:

a)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KB}$ (1)

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KC}$ (2)

Sumando ambas expresiones:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{DL}\right) + \left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) + 2 \cdot \overrightarrow{JK}$ (3)

Por ser L punto medio del segmento $\overline{AD}$, $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{DL} = \vec{O}$.

Por ser K punto medio del segmento $\overline{BC}$, $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{O}$.

Entonces, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$.

b)

Si P pertenece al segmento $\overline{KL}$, existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\overrightarrow{KP} = \lambda \cdot \overrightarrow{KL}$.

Sea M un punto de la arista $\overline{AB}$, existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{BA}$.

Sea M' un punto de la arista $\overline{CDB}$, existe $\beta \in [0,1]$ tal que $\overrightarrow{CM'} = \beta \cdot \overrightarrow{CD}$.

Veamos que existen $\alpha. \beta \in [0,1]$ tal que P es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$, es decir,

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = \vec{O}$.

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM}$ (4)

$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CM'}$ (5)

Sumando ambas expresiones:

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2 \cdot \overrightarrow{PK} + \left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM'}$ (6)

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2 \cdot \overrightarrow{PK} + \vec{0} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM'}$ (7)

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2 \cdot \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM'}$ (8)

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2\lambda \cdot \overrightarrow{LK} + \alpha \cdot \overrightarrow{BA} + \beta \cdot \overrightarrow{CD}$ (9)

Aplicando el apartado a)

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = -\lambda \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \alpha \cdot \overrightarrow{BA} + \beta \cdot \overrightarrow{CD}$ (10)

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = (\alpha - \lambda) \cdot \overrightarrow{BA} + (\beta - \lambda) \cdot \overrightarrow{CD}$ (11)

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = \vec{O}$ si $(\alpha - \lambda) \cdot \overrightarrow{BA} + (\beta - \lambda) \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

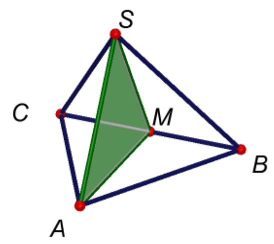
Los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ son linealmente independientes, entonces:

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = \lambda \end{cases}.$$

Por tanto si $\begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = \lambda \end{cases}$, P es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$.

Problema 27

Sea la pirámide ABCS de base el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$
La sección producida en la pirámide ABCS por un plano que pasa por el vértices S y A, y por el punto medio M de la arista de la base $\overline{BC}$ es un triángulo equilátero de lado 6cm. Calcular el área y el volumen de la pirámide.



Solución:

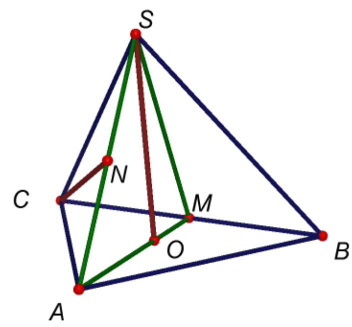
$\overline{AM} = \overline{AS} = \overline{MS} = 6$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BS} = \overline{BC} = \overline{CS} = 4\sqrt{3}$.

Sea O el punto medio del segmento $\overline{AM}$.

$\overline{OS}$ es la altura de la pirámide ABCS.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = 3\sqrt{3}$.

El volumen de la pirámide es:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3\sqrt{3} = 36cm^3.$$

Notemos que el triángulo $\overset{\Delta}{BCS}$ es equilátero de lado $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{ACS}$ son iguales.

Sea N el punto medio de la arista $\overline{AS}$.

$\overline{AN} = 3$, $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ANC}$:

$\overline{CN} = \sqrt{39}$.

El área del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ACS}$ es:

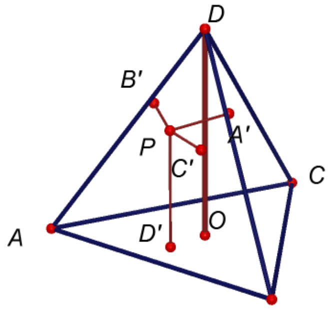
$$S_{ACS} = \frac{1}{2}6\sqrt{39}$$

El área de la pirámide ABCDS es:

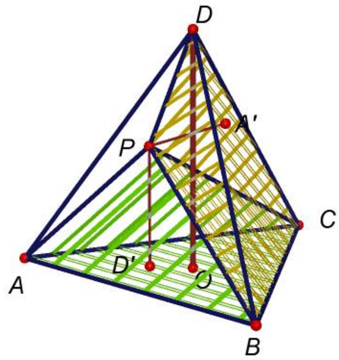
$$S_{ABCDS} = 2S_{ABC} + 2 \cdot S_{ACS} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\right) + 6\sqrt{39} = 79.04cm^2.$$

Problema 28
La suma de distancias de un punto interior de un tetraedro regular a las caras es igual a la altura del tetraedro.

Solución:
Sea el tetraedro regular ABCD.
Sea P un punt interior al tetraedro.



Sea A' la proyección de P sobre la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Sea B' la proyección de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ACD}$.
Sea C' la proyección de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ABD}$.
Sea D' la proyección de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.



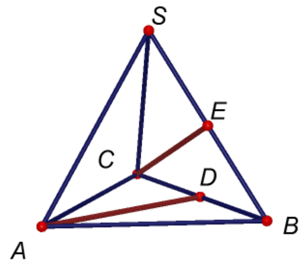
Sea O la proyección de D sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.
La altura del tetraedro ABCD es $\overline{OD}$.

El volumen del tetraedro ABCD es:
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD}.$$
El volumen del tetraedro ABCD es igual a la suma de los volúmenes de los tetraedros ABCP, ABDP, ACDP y BCDP.

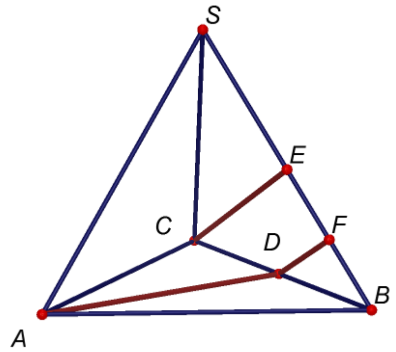
$$V_{ABCD} = V_{ABCP} + V_{ABDP} + V_{ACDP} + V_{BCDP}.$$
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{PB'} + \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot \overline{PC'} + \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot \overline{PB'} + \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot \overline{PA'}.$$
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC}\left(\overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PB'} + \overline{PA'}\right).$$
Entonces:
$$\frac{1}{3} S_{ABC}\left(\overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PB'} + \overline{PA'}\right) = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD}.$$
Por tanto, $\overline{PA'} + \overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PD'} = \overline{OD}$.

Problema 29

En el tetraedro regular ABCS, $\overline{AD}$ es la mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, E es el punto medio de la arista $\overline{BS}$.
Determinar el ángulo que forman las rectas AD, CE.
Gúsiev, problema 657.



Solución:
Sea $\overline{AB} = a$ arista del tetraedro regular.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADB}$:



$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{CE} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Por el punto D trazamos una recta paralela a la recta CE que talla la arista $\overline{BS}$ en el punto F.

Los triángulos $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{BDF}$ son semejantes y de razón 2:1.

Entonces, $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

El ángulo que forman las rectas AD y CE es igual al ángulo $\alpha = \angle ADF$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ABF}$:

$$\overline{AF}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a\frac{a}{4}\cos 60º.$$

$$\overline{AF}^2 = \frac{13}{16}a^2.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ADF}$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BF}^2 - 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BF}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{13}{16} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

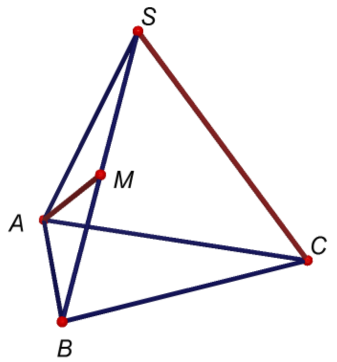
$$\cos\alpha = \frac{1}{6}. \quad \alpha = \arccos\frac{1}{6} \approx 80º24'21''.$$

Problema 30

En el tetraedro regular ABCS, $\overline{AM}$ es la mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABS}$.

Determinar el ángulo que forman las rectas AM, CS.

Gúsiev, problema 662.

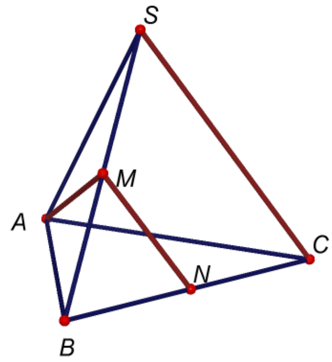


Solución:

Sea $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedro regular.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Por el punto M trazamos una recta paralela a la recta CS que corta la arista $\overline{BC}$ en el punto N.

Los triángulos $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{BNM}$ son semejantes y de razón 2:1.

Entonces, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{CS} = \frac{1}{2}a$.

El ángulo que forman las rectas AM y CS es igual al ángulo $\alpha = \angle AMN$.

$\overline{AN} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{AMN}$:

$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 - 2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{MN}\cdot\cos\alpha$.

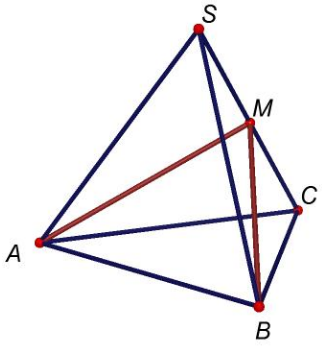
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}a\cdot\cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$. $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^{o}13'17''$.

Problema 31
Sea ABCS un tetraedro regular.
Calcular el ángulo que forman la arista $\overline{AB}$ y la cara $\overset{\Delta}{ACS}$.
Gúsiev, problema 637.

Solución:
Sea M el punto medio de la arista $\overline{CS}$.
La proyección de arista $\overline{AB}$ sobre $\overset{\Delta}{ACS}$ pertenece a la recta AM.
El ángulo que buscamos es $\alpha = \angle MAB$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos\alpha.$$

Simplificando:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54º44'8''.$$

Problema 32

En el tetraedro regular ABCS, por la mediana $\overline{AD}$ de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ y K el punto medio de la arista $\overline{SB}$, se ha dibujado un plano. Determinar el ángulo de este plano y la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

Gúsiev problema 700.

Solución:

Sea el tetraedro ABCS de arista $\overline{AB} = a$.

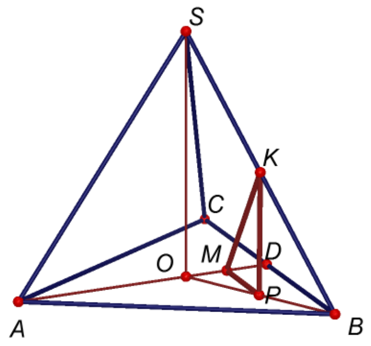
$\overline{KD} = \frac{1}{2}\overline{CS} = \frac{1}{2}a$.

Sea O la proyección de S sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ (circuncentro del triángulo).

$\overline{OS} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.



Sea P la proyección de K sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Sea M la proyección de K sobre $\overline{AD}$.

El ángulo que forma el plano ADK y la base $\overset{\Delta}{ABC}$ es $\alpha = \angle KMP$.

Sea $x = \overline{AM}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AMK}$, $\overset{\Delta}{DMK}$:

$$\overline{KM}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - x^2,\ \overline{KM}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2.$$

Resolviendo el sistema:

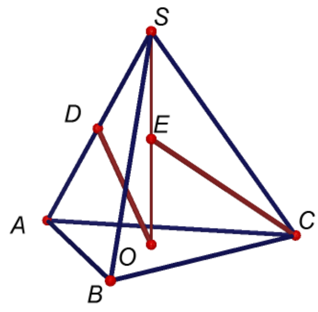
$$\begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{12}a \\ \overline{KM} = \frac{\sqrt{33}}{12}a \end{cases}.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{KMP}$:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{33}}{12}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}.\quad \alpha = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{22}}{11}\right) \approx 58^{o}31'4''.$$

Problema 33

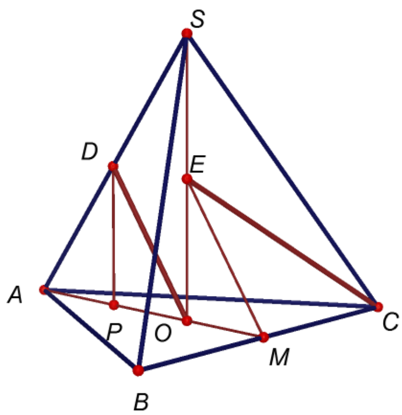
Sea D el punto medio de la arista $\overline{AS}$ del tetraedro regular ABCS.
Sea E el punto medio de la altura $\overline{OS}$.
Determinar el ángulo de las rectas CE y DO.
Gúsiev, problema 654.



Solución:
Sea el tetraedro regular ABCS de arista $\overline{AB} = a$.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{BMA}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



O es el baricentro de la base. Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a. \quad \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

Sea P la proyección de D sobre la base.

$$\overline{AP} = \overline{OP} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{OPD}$, $\overset{\Delta}{MOE}$. Además $\overline{PD}$, $\overline{OE}$ son paralelos.
Entonces, $\overline{OD}$ i $\overline{ME}$ son paralelos.
El ángulo que forman las rectas CE y DO es $\alpha = \angle MEC$.
$\angle EMC = 90^{o}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MOE}$:

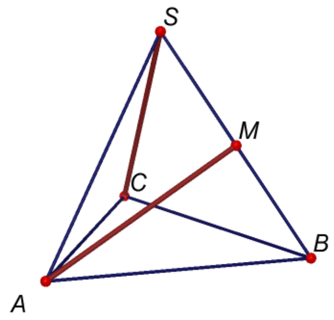
$$\overline{EM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MEC}$:

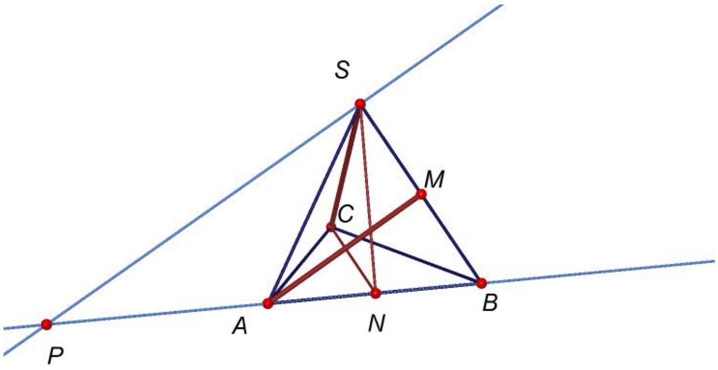
$$tg\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{EM}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a} = 1.$$

$\alpha = 45^{o}$.

Problema 34
Sea ABCD un tetraedro regular.
Sea M el punto medio de la arista $\overline{BS}$.
Calcular el ángulo de la mediana $\overline{AM}$ y la arista $\overline{CS}$.
Gúsiev, problema 662.



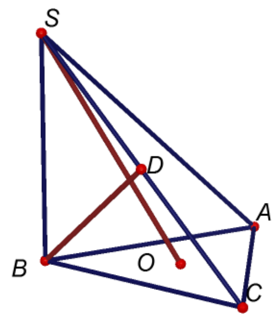
Solución:
Sea el tetraedro regular ABCS de arista $\overline{AB} = a$.
Por el vértice S trazamos una paralela a la mediana $\overline{AM}$ que corta la recta AB en el punto P.
$\angle SPB = 30^{o}$, $\angle PSB = 90^{o}$.
$\overline{PB} = 2\overline{BS} = 2a$, $\overline{PS} = a\sqrt{3}$
Sea N el punto medio de la arista $\overline{AB}$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMB}$:



$\overline{AM} = \overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.
$\overline{PN} = \frac{3}{2} a$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PNC}$:
$\overline{PC} = a\sqrt{3}$.
El ángulo que forman las rectas AM, CS es $\alpha = \angle PSC$.
Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{PSC}$:
$\left(a\sqrt{3}\right)^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}a \cdot \cos\alpha$.
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^{o}13'17''$.

Problema 35

En la pirámide triangular ABCS la base $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo equilátero y las caras $\overset{\Delta}{SAB}$ i $\overset{\Delta}{SBC}$ son perpendiculares a la base.
Sea la arista $\overline{SB}$ igual a la arista $\overline{AB}$.
Sea O el baricentro de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea D el punto medio de la arista $\overline{SC}$.
Calcular el ángulo que forman las rectas BD y SO.
Gúsiev, problema 671.



Solución 1:
Sea la arista $\overline{AB} = a$. La arista $\overline{SB}$ es perpendicular a la base.
Sea α el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$.

$\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BOS}$: $\overline{OS} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BCS}$: $\overline{SC} = a\sqrt{2}$.

$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

Aplicando el producto escalar a los vectores $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \left\|\overrightarrow{OS}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \cdot \cos\alpha$.

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}\right)$.

Por la propiedad del baricentro: $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BO}$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \cos 60^{o} = \frac{1}{2} a^2$.

Por ser ortogonales, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$.
Aplicando el producto escalar a los vectores $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BS} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\right)\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}\right).$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC} + \left\|\overrightarrow{BS}\right\|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} - \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS}\right).$$

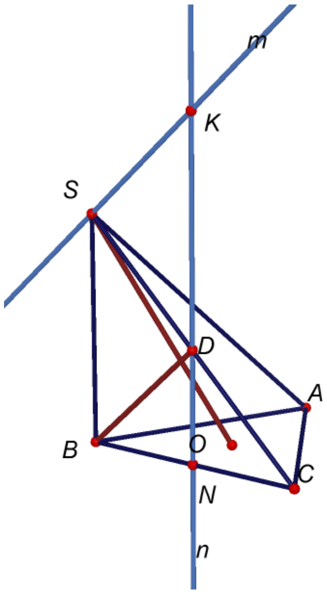
$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{4}a^2 \qquad (2)$$

Igualando las dos expresiones del producto escalar:

$\frac{\sqrt{6}}{3} a^2 \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4} a^2$. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{8}$. $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right) \approx 72^{o}10'14''$.

Solución 2:

Sea la arista $\overline{AB} = a$. La arista $\overline{SB}$ es perpendicular a la base.



Sea la recta m paralela a la recta BD que pasa por el vértice S.

Sea la recta n paralela a la arista $\overline{BS}$ que pasa per D.

Las rectas m, n se intersectan en el punto K que pertenece al plano BCS.

La recta n corta la arista $\overline{BC}$ en el punto medio N de la misma.

El ángulo que forman las rectas OS y BD es el ángulo $\beta = \angle KSO$.

$\overline{BO} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo

$\overset{\Delta}{BOS}$: $\overline{OS} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo

$\overset{\Delta}{BCS}$: $\overline{SC} = a\sqrt{2}$. $\overline{BD} = \overline{SK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a$.

$\overline{KN} = \overline{KD} + \overline{DN} = a + \dfrac{1}{2} a = \dfrac{3}{2} a$

$\overline{ON} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ONK}$:

$\overline{OK} = \dfrac{\sqrt{21}}{3} a$.

Aplicando el teorema del cosenos al triángulo $\overset{\Delta}{KSO}$:

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{3} a\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 - 2\frac{2\sqrt{3}}{3} a \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos\beta .$$

$\cos\beta = \dfrac{-\sqrt{6}}{8}$, $\beta = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{8}\right) \approx 107^{o}49'46''$.

Bibliografía:
GÚSIEV, V. y otros, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscú, 1989.

KLETENIK, D. *Problemas de geometría analítica.* Moscú. 1979.

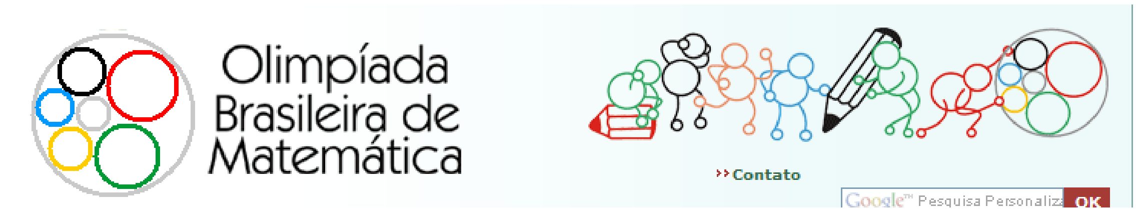
POGORÉLOV A.V. *Geometría elemental.* Ed. Mir. Moscú. 1974.

GUILLÉN SOLER, G. *Poliedros.* Ed. Síntesis. Col. Educación matemática en secundaria, 15. Madrid.
1997.

MEDVIÉDEV G.N. *Problemas de matemática. Olimpiadas y exámenes de admisión. Ed. URSS. Moscú 2010.*

Páginas Web:

http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml
Revista KöMaL. Societat Húngara de Física y Matemáticas.
Problemas olímpicos de todos los niveles.
Publican 8 números al año.
Idioma: Ingles y magiar.



http://www.obm.org.br/opencms/
Pàgina de la Olimpíada brasiliña de matemàtica.
Información sobre las pruebas.
Revista de problemas EUREKA. Dos niveles de problemas.
Idioma: Portugues.