

**LAS FUNCIONES DE LA  
DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA.  
UN CASO RELATIVO A LA  
GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO**

**VICENTE VICARIO GARCÍA**

***Dedicado a D. Juan Bosco Romero Márquez***

# ÍNDICE

|                                                                                                                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Resumen .....</b>                                                                                                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>Introducción .....</b>                                                                                                                                                  | <b>3</b>  |
| <b>Las funciones de la demostración .....</b>                                                                                                                              | <b>3</b>  |
| <b>Análisis del caso geométrico y las funciones de la demostración ...</b>                                                                                                 | <b>4</b>  |
| <b>Cálculo <math>\sin \frac{A}{2}, \cos A, a, \Delta, r, r_a, r_b, r_c, s, s_a</math>, exclusivamente en<br/>función de <math>h_a, w_a</math> y <math>m_a</math> .....</b> | <b>9</b>  |
| <b>Problemas relacionados con el problema original .....</b>                                                                                                               | <b>10</b> |
| <b>Bibliografía .....</b>                                                                                                                                                  | <b>16</b> |

---oooOooo---

## Resumen

En este trabajo examinaremos las funciones de la demostración matemática desde el contexto de un caso relacionado con la geometría del triángulo y detallaremos el marco teórico asociado. Se sugiere que solemos tener un punto de vista limitado sobre la demostración matemática encasillándola, en general, y casi exclusivamente, en el ámbito de lo puramente verificativo, dejando de lado con mucha frecuencia otras de sus funciones, entre ellas la *función explicativa*, núcleo de la comprensión matemática más profunda y la *función descubrimiento*, base para la creación matemática, entre otras. Seleccionamos, pues, este caso geométrico de cierta complejidad con el objetivo de mostrar la realidad de las funciones de la demostración.

## Introducción

Es bien conocido que muchos profesionales de la Matemática consideran la demostración como uno de sus pilares fundamentales. Algunos de ellos llegan incluso a afirmar que: “*La esencia de la matemática está en las demostraciones*”. Ross (1998, p.284).

Sin ánimo de polemizar y sin pretensión de ser exhaustivos, indicamos algunos de los trabajos pioneros en este campo: Hanna (1989 a, b, 1990), de Villiers (1993), Hersch (1993), Hanna and Jahnke (1996), Ibañez y Ortega (1997), Recio (1999), Knuth (2002). En estos trabajos se indica la importancia asociada a la demostración matemática, a sus funciones, y al análisis científico y didáctico de la misma.

Desde el punto de vista científico, el análisis de las demostraciones es vital para la comprensión del objeto matemático de estudio y su interrelación con otros conceptos matemáticos cercanos o del propio contexto e incluso, a veces, bastante alejados del campo de estudio en cuestión. Por otra parte, es muy importante el análisis didáctico ya que nos proporcionará información suficiente para plantearnos qué funciones de la demostración son susceptibles de utilizarse en el aula para hacer de todo el proceso una actividad verdaderamente significativa.

## Las funciones de la demostración

Tradicionalmente la demostración matemática se ha tratado casi exclusivamente en términos de justificación o de verificación de enunciados de proposiciones matemáticas. Uno de los campos de batalla de muchos profesores de matemáticas es criticar este punto de vista por ser parcial y limitado. Como terapia se pretende analizar sucintamente las funciones más importantes de la demostración y sacar el mejor provecho desde los puntos de vista científico y didáctico.

Es ya, hasta cierto punto un clásico, el análisis que hace de Villiers (1993) de las funciones de la demostración matemática. Sin ánimo de ser completos y caracterizar otras funciones o subfunciones emergentes, podemos destacar las siguientes funciones de la demostración matemática:

- **Verificación** (concerniente a la verdad o falsedad de una proposición)
- **Explicación** (concerniente a la profundización y mejor comprensión de la esencia del problema de estudio)
- **Simplificación** (organización de resultados dentro de un sistema axiomático)
- **Descubrimiento** (concerniente al análisis de corolarios, conjeturas y vías de abordar otras nuevas proposiciones cercanas a la de estudio)
- **Comunicación** (transmisión del conocimiento matemático)

En mi artículo “*Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$  y las funciones de la demostración*” (IX simposio de la SEIEM,, Córdoba 2005, pp:145-152) expongo una pequeña bibliografía que caracteriza esta problemática: Davis and Hersch (1998), de Guzman (1995), Ibañez y Ortega (1997), de Guzman (2003), etc.

## **Análisis del caso geométrico y las funciones de la demostración**

Nuestro caso geométrico tiene su génesis en el problema J136 propuesto por Panagioté Ligouras en la revista digital Mathematical Reflections. Otros problemas relacionados con este problema inicial y propuestos por el mismo autor, como veremos a continuación, son variantes del problema principal y aparecieron más o menos disfrazados en otras revistas como la revista digital OIM (iberoamericana de matemáticas) o muy recientemente, la sección de problemas de la Gaceta de la RSME.

El problema inicial, con la salvedad de que emplearemos la notación usual para las bisectrices interiores de un triángulo, en lugar de la notación empleada por el proponente, era el siguiente:

J136.- (Propuesto por Panagioté Ligouras, “Leonardo da Vinci” High School, Bari, Italy).

*Let  $a, b, c$  be the sides,  $m_a, m_b, m_c$  the medians,  $h_a, h_b, h_c$  the altitudes, and  $w_a, w_b, w_c$  the internal angle bisectors of a triangle  $ABC$ . Prove that the diameter of the circumcircle of triangle  $ABC$  is equal to*

$$D = 2R = \frac{w_a^2}{h_a} \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

A continuación presentamos las dos resoluciones propuestas por los editores de la revista Mathematical Reflections sobre este problema, con cambios prácticamente intranscendentes y después la que propone el autor de este artículo. Haremos algunos comentarios sobre cada una de ellas y más tarde un análisis más profundo de la situación.

**1ª Resolución:** (Arkady Alt, San José California, USA)

Sea  $w_a$  la bisectriz interior que parte del vértice  $A$  y  $h_a$  la altura desde el mismo. Asumiremos que  $AB \neq AC$  porque de otro modo  $w_a = h_a$  y en este caso la expresión queda indefinida. Entonces es bien conocido que el ángulo que forman la bisectriz interior que parte de  $A$  con la altura que parte del mismo vértice, viene dado por  $\angle(h_a, w_a) = (B - C)/2$  y, en consecuencia, tenemos que

$$h_a = w_a \cos \frac{B-C}{2}$$

y, por tanto

$$\frac{w_a^2}{h_a^2} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{B-C}{2}} - 1 = \tan^2 \frac{B-C}{2}$$

Además, aplicando expresiones clásicas que expresan la mediana y la altura del triángulo que parten del vértice  $A$  en función exclusivamente de los lados del triángulo

$$m_a^2 - h_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2} = \frac{(b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

y, entonces, empleando el teorema de los senos generalizado, relaciones trigonométricas elementales junto con razones trigonométricas del ángulo doble y fórmulas de transformación de diferencia de cosenos en productos, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{w_a^2}{h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}} &= \frac{w_a^2}{h_a^2} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{\frac{w_a^2}{h_a^2} - 1}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{B-C}{2}} \cdot \frac{|b^2 - c^2|}{2a} \cdot \left| \cot \frac{B-C}{2} \right| \\ &= \frac{|b^2 - c^2|}{a|\sin(B-C)|} = \frac{4R^2|\sin^2 B - \sin^2 C|}{2R\sin A \cdot |\sin(B-C)|} = \frac{R|2\sin^2 B - 2\sin^2 C|}{\sin A |\sin(B-C)|} \\ &= \frac{R|\cos 2C - \cos 2B|}{\sin A |\sin(B-C)|} = \frac{2R|\sin(B+C) \cdot \sin(B-C)|}{\sin A \cdot |\sin(B-C)|} = 2R \end{aligned}$$

Comentario 1: Podemos observar que la demostración de la proposición propuesta por el autor es puramente verificativa o justificativa, es decir, demuestra la veracidad de la proposición, pero básicamente no demuestra nada más, ni profundiza en los fundamentos del problema en cuestión, ni da pistas sobre cómo se pudo haber llegado previamente a tal relación que aparece propuesta en el problema. Parece como si lo único en claro que podemos sacar de la demostración propuesta es su absoluta certeza (que no es poco) pero también parece que no aporta comprensión al problema, es decir,

no sabemos por qué es cierta la proposición desde un punto de vista constructivista o de proposiciones más elementales que encajadas entre sí produzcan la relación pedida.

## 2ª Resolución (Aravind Srinivas, Chennai, India)

El autor de esta resolución no comenta, por parecerle obvio, que la expresión a demostrar queda indefinida si el triángulo de partida es isósceles. Su demostración es como sigue:

Utilizaremos las conocidas expresiones

$$w_a^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \quad h_a = \frac{bc}{2R} \quad m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

sustituyendo las mismas en la expresión

$$2R = \frac{w_a^2}{h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

y después de elevar al cuadrado ambos miembros, tenemos que

$$\frac{(b+c+a)^2(b+c-a)^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{R^2(2b^2+2c^2-a^2) - b^2c^2((b^2+c^2)^2)}{4R^2a(b+c+a)(b+c-a) - b^2c^2((b+c)^2)} = 1$$

Por otra parte, después de emplear la fórmula de Euler  $R = \frac{abc}{4\Delta}$ , llegamos a la expresión siguiente para el área del triángulo, que es cierta, ya que corresponde a la fórmula de Herón del área de un triángulo

$$4\Delta = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

lo que concluye la demostración.

Comentario 2: Podemos observar que básicamente esta demostración posee prácticamente las mismas características que la demostración anterior. Tiene además, sin ninguna duda, un carácter verificativo incluso mayor que la anterior, puesto que ni siquiera aparecen algunas relaciones básicas entre elementos de un triángulo, que sí aparecen en la demostración anterior. Parece una secuencia mecánica de sustituciones, cálculo algebraico y verificación final. No nos da ninguna pista sobre cuál es la causa de que los elementos del triángulo tengan que cumplir la proposición, es decir, no proporciona la explicación que todo amante de la geometría del triángulo quisiera, ni aporta ideas para resolver problemas afines al nuestro.

### 3ª Resolución (del autor de este artículo)

En esta demostración se propone un análisis geométrico de la situación, búsqueda de relaciones geométricas y trigonométricas elementales y deducción de la proposición a partir de las mismas. La demostración, por tanto, es explicativa ya que a partir de su estudio encontramos las razones básicas de por qué es cierta la proposición que pretendemos demostrar. Se distingue entonces de las otras dos demostraciones expuestas por su carácter explicativo y no puramente verificativo.

Para el análisis de la demostración emplearemos la notación habitual en la geometría del triángulo y previamente detallamos la construcción con regla y compás (métodos euclidianos) del triángulo, conocidos  $h_a, m_a, w_a$ . Obviamente partimos de un triángulo no isósceles y no equilátero para que la expresión dada tenga sentido. Basta con trazar  $h_a$  y perpendicularmente por el punto  $F$  pie de la altura sobre el lado  $BC$ , la recta que contiene a este lado. Desde el extremo de la altura se trazan arcos sobre el mismo lado de la altura, de longitudes  $m_a$  y  $w_a$  determinándose el punto medio  $M$  del lado  $BC$  y el pie de la bisectriz interior  $D$ , respectivamente. Por el punto medio del lado se traza una recta perpendicular al lado  $BC$  (mediatriz del lado  $BC$ ) y se prolonga la bisectriz interior hasta cortar a ésta en el punto  $E$ . Es bien sabido que éste punto de corte pertenece a la circunferencia circunscrita y es el punto medio del arco  $BC$ . Finalmente, se determina la nueva mediatriz que corresponde al segmento de bisectriz interior ampliada hasta cortar a la circunferencia circunscrita y el punto de corte con la mediatriz del lado  $BC$  obteniéndose el circuncentro  $O$  del triángulo buscado (ya que ésta bisectriz interior prolongada hasta cortar a la circunferencia circunscrita es una cuerda de la misma). Entonces se traza la circunferencia circunscrita pasando por  $A$  y se determinan los otros dos vértices del triángulo  $B$  y  $C$ , con lo que se termina la construcción con regla y compás pedida.

A partir de aquí utilizaremos la construcción anterior e intentaremos hacer un análisis geométrico minucioso de dicha configuración. Es claro que  $\angle BOE = \angle A$  y  $\angle AOC = 2\angle C$ . Es sencillo observar que el triángulo  $AOE$  es isósceles con  $\angle EAO = \angle AEO$ . Estos ángulos vienen dados por

$$\angle EAO = \frac{\pi - (A + 2C)}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{A}{2} + C\right) = \frac{B - C}{2}$$

y, en consecuencia, si denotamos por  $W_a$  la longitud de la bisectriz interior que parte del vértice  $A$  del triángulo prolongada hasta cortar a la circunferencia circunscrita, es claro que tenemos

$$W_a = 2R \cos \frac{B - C}{2}$$

y, por tanto, a partir de la expresión  $\angle EAO = (B - C)/2$ , llegamos a la clásica

$$h_a = w_a \cos \frac{B - C}{2}$$

que nos proporciona las identidades siguientes junto con la determinación de  $R$ , radio de la circunferencia circunscrita al triángulo

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{W_a}{2R} = \frac{h_a}{w_a} \rightarrow R = \frac{w_a W_a}{2h_a}$$

Además, denotando  $x = DE$  aplicando el teorema de Pitágoras y relaciones de semejanza entre los triángulos  $FDA$  y  $DME$  tenemos

$$\frac{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}}{w_a} = \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2}}{x} \rightarrow$$

$$x = \frac{w_a}{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}} \cdot (\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2})$$

con lo que

$$W_a = w_a + x = \frac{w_a}{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}} \cdot (\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2})$$

y, finalmente, tenemos que

$$R = \frac{w_a W_a}{2h_a} = \frac{w_a}{2h_a} \cdot w_a \left[ 1 + \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2}}{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}} \right] = \frac{w_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

lo que termina la demostración.

Comentario 3: Es claro que en esta demostración obtenemos, a partir de relaciones geométricas elementales la proposición pedida, sin más recursos que el teorema de Pitágoras, relaciones de semejanza entre triángulos, consideraciones sobre ángulos en una circunferencia y otros elementos básicos de la geometría del triángulo. Hemos podido deducir la expresión pedida, no simplemente verificarla como se hacía básicamente en las resoluciones 1ª y 2ª ya expuestas y comentadas anteriormente.

A partir de aquí, seguiremos el auxilio de la demostración anterior y otra serie de relaciones conocidas para poder obtener el valor de ciertos elementos importantes del triángulo expresándolos exclusivamente en función de  $h_a, m_a, w_a$ , de la misma forma en la que aparecía el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de partida. Observemos que una demostración puramente verificativa no proporciona esta vía de conocimiento, de aquí la importancia por abogar por las demostraciones explicativas.

**Cálculo de  $\text{sen}\frac{A}{2}, \cos A, a, \Delta, r, r_a, r_b, r_c, s, s_a$ , del triángulo exclusivamente en función de  $h_a, w_a$  y  $m_a$ .**

Comenzando por las relaciones de semejanza entre los triángulos  $AFD$  y  $DME$  es claro que, en la configuración ya detallada anteriormente, tenemos que

$$\frac{h_a}{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}} = \frac{R(1 - \cos A)}{\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2}} \rightarrow 1 - \cos A = \frac{h_a}{R} \left[ \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2}}{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}} \right] =$$

$$h_a \cdot \frac{2h_a}{w_a^2} \cdot \frac{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}}{\sqrt{m_a^2 - h_a^2}} \cdot \left[ \frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{w_a^2 - h_a^2}}{\sqrt{w_a^2 - h_a^2}} \right] = 2 \left( \frac{h_a}{w_a} \right)^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{w_a^2 - h_a^2}{m_a^2 - h_a^2}} \right]$$

de donde obtenemos inmediatamente

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \frac{h_a}{w_a} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{\frac{w_a^2 - h_a^2}{m_a^2 - h_a^2}}}$$

Por otra parte

$$\cos A = 1 - 2 \left( \frac{h_a}{w_a} \right)^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{w_a^2 - h_a^2}{m_a^2 - h_a^2}} \right]$$

Además, como  $bc = 2Rh_a$ , empleando la relación  $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$  y el teorema de los cosenos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{4m_a^2 + a^2}{2} - a^2}{4Rh_a} = \frac{2m_a^2 - \frac{a^2}{2}}{2w_a^2 \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}}$$

determinamos  $a$  en función exclusivamente de  $h_a, m_a, w_a$ . Es también sencillo que podríamos haber utilizado el teorema de los senos generalizado y de nuevo obtenemos

$$a^2 = 4R^2(1 - \cos^2 A) = \frac{w_a^4}{h_a^2} \cdot \frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - 2 \left( \frac{h_a}{w_a} \right)^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{w_a^2 - h_a^2}{m_a^2 - h_a^2}} \right] \right)^2 \right]$$

Es también claro que, puesto que  $a$  se puede escribir como función exclusivamente de  $h_a, m_a, w_a$  podemos obtener  $b^2$  y  $c^2$  como raíces de la siguiente ecuación de segundo grado

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ b^2 c^2 = 4R^2 h_a^2 \end{cases} \rightarrow x^2 - \left(2m_a^2 + \frac{a^2}{2}\right)x + 4R^2 h_a^2$$

donde todos los coeficientes de la misma son funciones exclusivas de  $h_a, m_a, w_a$ .

De esta forma podemos determinar también el área del triángulo

$$abc = 4R\Delta \rightarrow \Delta = \frac{abc}{4R}$$

y, el radio de la circunferencia inscrita

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

como funciones exclusivas de  $h_a, m_a, w_a$  ya sabemos expresar todos los lados del triángulo de la misma forma.

Para el cálculo de las simedianas tenemos

$$s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2} m_a = \frac{4Rh_a m_a}{2m_a^2 + \frac{a^2}{2}}, \text{ etc.}$$

y, para los radios de las circunferencias exinscritas

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a}, \text{ etc.}$$

que son funciones exclusivas de  $h_a, m_a, w_a$ .

## Otros problemas propuestos relacionados con el problema original

Después de que apareciese el problema original en Mathematical Reflections (volumen 3, 2009), variantes elementales del mismo un tanto reformadas fueron propuestas (como ya comentamos) por el mismo proponente en la revista digital OIM (iberoamericana de matemáticas) o muy recientemente, la sección de problemas de la Gaceta de la RSME, en la que el plazo de entrega de la resolución del problema propuesto expira un mes después de que este artículo se haga público.

Comenzaremos por la variante aparecida en la revista OIM (iberoamericana de matemáticas) y en la que la resolución publicada es del autor de este artículo. Procuraré resumir la resolución propuesta para no reiterar contenidos anteriores.

Problema 187.- (Propuesto por Panagiote Ligouras, “Leonardo da Vinci” High School, Bari, Italy).

Sean  $a, b, c$  las longitudes de los lados,  $m_a, m_b, m_c$  las longitudes de sus medianas,  $h_a, h_b, h_c$  las longitudes de sus alturas,  $w_a, w_b, w_c$  las longitudes de las bisectrices interiores y  $R$  el radio del círculo circunscrito al triángulo  $ABC$ . Probar que

$$\sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (w_a^2 - h_a^2)} \geq 12R^2$$

Resolución: (autor de este artículo)

Empleando la conocida expresión que nos proporciona el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo, conocidos  $h_a, m_a, w_a$ , es decir,

$$R = \frac{w_a^2}{2h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

tenemos que

$$\sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (w_a^2 - h_a^2)} = \sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a}{h_a^2} \cdot \frac{4R^2 h_a^2}{w_a^4} = 4R^2 \sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} \geq 4R^2 \cdot 3 = 12R^2$$

En mi resolución del problema aparecía una nota al final de la misma que reproduzco textualmente:

Nota: Se puede mejorar la desigualdad anterior utilizando el teorema de Liu (ver en la red Pythagoras theorem and its Applications, de Paul Yiu; pág 128) que establece que si  $\theta$  es el ángulo que forman la mediana y la bisectriz interior que parten del vértice  $A$ , entonces se cumple la relación siguiente

$$m_a w_a \cos \theta = s(s - a)$$

con lo que tenemos

$$\sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} = \sum_{cíclica} \frac{s(s - a)}{w_a^2 \cdot \cos \theta} \geq \sum_{cíclica} \frac{s(s - a)}{w_a^2} \geq 3$$

donde empleamos la conocida desigualdad

$$w_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s - a)} \leq \sqrt{s(s - a)}$$

y, por tanto

$$\sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (w_a^2 - h_a^2)} = 4R^2 \sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} \geq 4R^2 \sum_{cíclica} \frac{s(s - a)}{w_a^2 \cdot \cos \theta} \geq 4R^2 \sum_{cíclica} \frac{s(s - a)}{w_a^2} \geq 12R^2$$

lo que concluía mi resolución del problema que se proponía.

Por otra parte, se puede refinar aún más el resultado anterior a partir del artículo: “Some geometric inequalities involving angle bisectors and medians of a triangle” de

Wei-Dong Jiang and Mihaly Bencze in Journal of Mathematical Inequalities, volume 5, Number 3 (2011), 363-369. En él aparecen varias expresiones que vamos a utilizar para estos refinamientos. En particular, podemos usar las dos desigualdades siguientes donde la última refina la primera (ver artículo anterior)

$$\sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} \geq \frac{13}{4} - \frac{r}{2R}$$

$$\sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} \geq \frac{s^2 + 10Rr + r^2}{8Rr}$$

lo que nos lleva a los sucesivos refinamientos siguientes

$$\begin{aligned} \sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (w_a^2 - h_a^2)} &= \sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a}{h_a^2} \cdot \frac{4R^2 h_a^2}{w_a^4} = 4R^2 \sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} \geq 4R^2 \left( \frac{13}{4} - \frac{r}{2R} \right) \\ &= 13R^2 - 2Rr \geq 13R^2 - R^2 = 12R^2 \end{aligned}$$

o bien, a partir de la segunda desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (w_a^2 - h_a^2)} &= \sum_{cíclica} \frac{w_a^3 m_a}{h_a^2} \cdot \frac{4R^2 h_a^2}{w_a^4} \\ &= 4R^2 \sum_{cíclica} \frac{m_a}{w_a} \geq 4R^2 \cdot \frac{s^2 + 10Rr + r^2}{8Rr} \geq \frac{R}{2r} \cdot (s^2 + 10Rr + r^2) \\ &\geq 12R^2 \end{aligned}$$

ya que

$$s^2 + 10Rr + r^2 \geq 24Rr \leftrightarrow s^2 + r^2 \geq 14Rr$$

y esto es cierto a partir de una de las desigualdades de Gerretsen y la desigualdad de Euler-Chapple, respectivamente:  $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ ,  $R \geq 2r$ .

No obstante, la historia del problema no termina aquí, ya que en la sección de problemas de la revista Gaceta Matemática aparece recientemente propuesto la siguiente variante del problema principal del mismo autor original

Problema 230.- Gaceta de la RSME.- (Propuesto por Panagioté Ligouras, “Leonardo da Vinci” High School, Bari, Italy).

En el triángulo  $ABC$ , sean  $m_a, m_b, m_c$  las longitudes de sus medianas,  $h_a, h_b, h_c$  las longitudes de sus alturas,  $w_a, w_b, w_c$  las longitudes de las bisectrices interiores y  $R$  el radio del círculo circunscrito al triángulo  $ABC$ . Probar que

$$\sum_{cíclica} \frac{m_a^2}{h_a} \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}} \geq 6R$$

Daremos aquí una propuesta de resolución de este problema, teniendo en cuenta que aún no se han publicado resoluciones puesto que el plazo de envío de las mismas expira dentro de un mes (31 de marzo de 2014) y se tardarán algunos meses en publicarse las que se hayan enviado.

Resolución: (del autor de este artículo)

Procediendo como se ha hecho anteriormente y teniendo en cuenta la ya bien conocida relación

$$2R = \frac{w_a^2}{h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

es inmediato llegar a

$$\sum_{cíclica} \frac{m_a^2}{h_a} \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}} = \sum_{cíclica} \frac{2R \cdot m_a^2}{w_a^2} = 2R \sum_{cíclica} \left(\frac{m_a}{w_a}\right)^2 \geq 2R \cdot 3 = 6R$$

De nuevo, podemos refinar la desigualdad anterior, aplicando la conocida desigualdad  $w_a \leq \sqrt{s(s-a)}$  y empleando la siguiente identidad que aparece en el artículo ya mencionado de Wei-Dong Jiang and Mihaly Bencze

$$m_a^2 w_a^2 = s^2(s-a)^2 + \Delta^2 \cdot \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2$$

con lo que obtenemos

$$\sum_{cíclica} \left(\frac{m_a}{w_a}\right)^2 = \sum_{cíclica} \frac{m_a^2 \cdot w_a^2}{w_a^4} \geq \sum_{cíclica} \frac{m_a^2 \cdot w_a^2}{s^2(s-a)^2} \geq 3 + \left(\frac{\Delta}{s(s-a)}\right)^2 \cdot \sum_{cíclica} \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2$$

y, por tanto

$$\sum_{cíclica} \frac{m_a^2}{h_a} \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}} = \sum_{cíclica} \frac{2R \cdot m_a^2}{w_a^2} = 2R \sum_{cíclica} \left(\frac{m_a}{w_a}\right)^2 \geq 2R \cdot \left[3 + \left(\frac{\Delta}{s(s-a)}\right)^2 \cdot \sum_{cíclica} \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2\right] \geq 6R$$

La última vez que me he encontrado con la estructura geométrica asociada al problema relacionado con este artículo, ha sido en el problema 698 de la revista digital Triángulos Cabri editada por D. Ricardo Barroso Campos. El problema que se propuso es el siguiente:

Problema 698.- (Propuesto por Pascual Plasencia, profesor de dibujo del I.E.S. Francisco de Orellana, Trujillo).

Construir un triángulo  $ABC$  conociendo  $a, m_a, w_a$

Plasencia, P. (2014). Comunicación personal.

Resolución: (del autor de este artículo)

En mi resolución de este problema propuse determinar  $h_a$ , conocidos  $a, m_a, w_a$ , y así pasar de la construcción del problema original a otra construcción relacionada con el triángulo conocidos  $h_a, m_a, w_a$  ya detallada minuciosamente en este artículo.

Centrándonos ahora en la resolución del problema, es conveniente observar que podemos determinar  $b^2 + c^2$  en función exclusivamente de  $a$  y  $m_a$ , ya que tenemos

$$m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \rightarrow b^2 + c^2 = \frac{4m_a^2 + a^2}{2}$$

Además, utilizando la fórmula de Herón tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2a^2(b^2 + c^2) + 2b^2c^2 - a^4 - (b^2 + c^2)^2 + 2b^2c^2} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(b^2 + c^2)(2a^2 - (b^2 + c^2)) - a^4 + 4b^2c^2}; \end{aligned} \quad [*]$$

y, empleando las conocidas expresiones

$$bc = 2Rh_a = w_a^2 \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

con lo que al sustituir en la expresión [\*] llegamos a la siguiente relación que permite calcular  $h_a$  resolviendo una ecuación bicuadrada con coeficientes reales constructibles, y en consecuencia con raíces también constructibles:

$$\Delta = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{4m_a^2 + a^2}{2}\right) \left(2a^2 - \frac{4m_a^2 + a^2}{2}\right) - a^4 + 4w_a^4 \left(\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}\right)}$$

Finalmente, una vez determinado  $h_a$  ya ha sido detallada la construcción del triángulo, conocidos  $h_a, m_a, w_a$ . Es interesante observar que los problemas de construcción en los que se conocen  $R, m_a, w_a$ , o bien  $h_a, m_a, R$ , etc. se resuelven con la misma estrategia.

Finalmente, proponemos y resolvemos un problema que estamos seguros que era de los del agrado de D. Juan-Bosco Romero, pues más de una vez había propuesto problemas similares

Problema: Dado un triángulo  $ABC$ , sea  $\angle A$  y el lado  $c$  fijos. Determinar

$$\lim_{b \rightarrow c} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

Para determinar el límite emplearemos la expresión

$$2R = \frac{w_a^2}{h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

y tendremos en cuenta que  $\angle A$  y el lado  $c$  son fijos, y que si  $b \rightarrow c$  el triángulo tiende a ser isósceles. Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow c} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}} &= \lim_{b \rightarrow c} \frac{2Rh_a}{w_a^2} = \lim_{b \rightarrow c} \frac{2\sqrt{c^2 - h_a^2}}{\text{sen} A} \cdot \frac{h_a}{w_a^2} = \\ \lim_{b \rightarrow c} \frac{2}{\text{sen} A} \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{h_a}\right)^2 - 1} &= \frac{2}{\text{sen} A} \cdot \frac{\text{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \sec^2 \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Por último, indicamos que si en la expresión relacionada con la bisectriz interior de un ángulo en función de las longitudes de sus lados

$$w_a^2 = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)$$

sustituimos  $bc = 2Rh_a$  y  $2R$  por su expresión bien conocida en función de  $h_a, m_a, w_a$ , tenemos que

$$w_a^2 = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \rightarrow 1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = \sqrt{\frac{w_a^2 - h_a^2}{m_a^2 - h_a^2}}$$

expresión que nos parece muy interesante a la hora de trabajar con el primer miembro en lugar de con el segundo, por su mayor comodidad.

## Bibliografía

- Davis, P.J. & Hersch, R. (1983). *Experiencia Matemática*. Madrid. Labor
- Guzmán, M. de (1995). Capítulo 2: Demostración Matemática.
- Guzmán, M. de (2003).. Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas. Iniciación al método matemático. Base universitaria. Madrid. Anaya.
- Hanna, G. (1989a). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.
- Hanna, G. (1989b). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21, 6-13.
- Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. *International Handbook of Mathematics Education*
- Hersch, R. (1993). Proving is convencing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.
- Ibañes, M. Ortega, T. (1997). La demostración matemática. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática*, 9(2), 65-104
- Ibañes, M. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. *Investigación en Educación Matemática*. Almería. Universidad de Almería.
- Knuth, E.J. (2002).Secondary School Mathematics Teachers'Conception of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Martínez Recio, A. (1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y al aprendizaje de la demostración matemática. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American mathematical Monthly*, 3, 252-255.
- Vicario, V. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$  y las funciones de la demostración. (IX simposio de la SEIEM, Córdoba 2005), pp:145-152.
- Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

---oooOooo---