Problema

Sea dado un triángulo $\triangle ABC$ -por tanto los tres puntos A, B, C se sobreentienden construidos con regla y compás-, construir los triángulos $\triangle C_i'A_i'B_i'$ equiláteros inscritos en las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, con lados de longitud $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Solución:

Al igual que clásicamente para la construcción de un polígono regular; para dar la construcción de tales triángulos basta con dar la fórmulas algebraicas de las longitudes de los segmentos a partir de los cuales pueden construirse los triángulos pedidos; con la condición de que sean unas fórmulas a base de un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas de longitudes de segmentos construibles con regla y compás. Pues tales operaciones algebraicas se realizan a través el teorema de Thales y del teorema de la Altura.

Consideremos coordenadas cartesianas tal que, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (x, y)$ con $y > 0$.

En consecuencia los dos segmentos de longitud $|x|$ e y, se sobreentienden construidos con regla y compás.

Además de dar la construcción vamos a demostrar lo siguiente:

Se tiene la circunferencia $\mathbb{B}_{12}$ de ecuación $3x^2 + 3y^2 - 3x + \sqrt{3}y = 0$ y la circunferencia $\mathbb{B}_{34}$ de ecuación $3x^2 + 3y^2 - 3x - \sqrt{3}y = 0$. El triángulo $\triangle ABC$, de forma genérica, verificará que C no pertenece a ninguna de sus dos circunferencias anteriores, y entonces: existen 4 triángulos $\triangle C_i'A_i'B_i'$ equiláteros, $i = 1 \div 4$, inscritos en la rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, con lados de longitud $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. De forma no genérica se verificará que C pertenece a una de sus dos circunferencias anteriores, y en tal caso: existen 2 triángulos $\triangle C_j'A_j'B_j'$ equiláteros, $j = 1 \div 2$ ó $j = 3 \div 4$, inscritos en la rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, con lados de longitud $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Nótese que las circunferencias $\mathbb{B}_{12}$ y $\mathbb{B}_{34}$ son contruibles trivialmente, pues se tratan de las circunferencias que pasan por los vértices A, B, y sus centros son los vértices exterior e interior, respectivamente, de Napoleón, relativos a $\overline{AB}$ -o sea, son los centros de los dos triángulos equiláteros con lado $\overline{AB}$-.

Para la construcción de estos 4 triángulos $\triangle C_i'A_i'B_i'$ -2 en el caso no genérico- basta construir sus vértices C_i' sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (la construcción de los otros vértices A_i', B_i' restantes es trivial). Dicho de otra forma, basta construir con regla y compás los segmentos $\mathbb{H}_i$ de longitud $|H_i|$, tal que las coordenadas de C_i' son $(H_i, 0)$.

Entonces: con $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$, sea $\mathbb{H} = (H, 0)$ un punto cualquiera en $\overleftrightarrow{AB}$.

La recta $g_{\mathbb{H},\frac{\pi}{3}}(\overleftrightarrow{BC})$, recta imagen del giro de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ con centro $\mathbb{H}$ y ángulo directo de amplitud $\frac{\pi}{3}$, tiene por ecuación

$$\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{\lambda}{2}\left(1 - x + \sqrt{3}y\right) + \tfrac{H}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{y}{2} + \tfrac{\lambda}{2}\left(\sqrt{3} - y - \sqrt{3}x\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}H\right)$$

El punto intersección $B_{12} = g_{\mathbb{H},\frac{\pi}{3}}(\overleftrightarrow{BC}) \cap \overleftrightarrow{AC}$ es punto tal que el triángulo equilátero $\triangle \mathbb{H} A_{12} B_{12}$ es inscrito en la rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$.

Calculando, se obtienen las coordenadas de B_{12}:

$$\left(x\frac{3Hx + \sqrt{3}\,(2-H)\,y - 3H}{3x^2 + 3y^2 - 3x + \sqrt{3}y}, y\frac{3Hx + \sqrt{3}\,(2-H)\,y - 3H}{3x^2 + 3y^2 - 3x + \sqrt{3}y}\right)$$

Claramente si el punto C pertenece a la circunferencia $\mathbb{B}_{12}$ entonces el punto B_{12} no pertenece al plano afín euclídeo, las rectas $g_{\mathbb{H},\frac{\pi}{3}}(\overleftrightarrow{BC})$, $\overleftrightarrow{AC}$ son paralelas.

La recta $g_{\mathbb{H},-\frac{\pi}{3}}(\overleftrightarrow{BC})$, recta imagen del giro de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ con centro $\mathbb{H}$ y ángulo inverso de amplitud $\frac{\pi}{3}$, tiene por ecuación

$$\left(\tfrac{\lambda}{2}\left(x + \sqrt{3}y - 1\right) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{H}{2}, \tfrac{\lambda}{2}\left(y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}H\right)$$

El punto intersección $B_{34} = g_{\mathbb{H},-\frac{\pi}{3}}(\overleftrightarrow{BC}) \cap \overleftrightarrow{AC}$ es punto tal que el triángulo equilátero $\triangle \mathbb{H} A_{34} B_{34}$ es inscrito en la rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$.

Calculando, se obtienen las coordenadas de B_{34}:

$$\left(x\frac{3Hx + \sqrt{3}\,(-2+H)\,y - 3H}{3x^2 + 3y^2 - 3x - \sqrt{3}y}, y\frac{3Hx + \sqrt{3}\,(-2+H)\,y - 3H}{3x^2 + 3y^2 - 3x - \sqrt{3}y}\right)$$

Claramente si el punto C pertenece a la circunferencia $\mathbb{B}_{34}$ entonces el punto B_{34} no pertenece al plano afín euclídeo, las rectas $g_{\mathbb{H},-\frac{\pi}{3}}(\overleftrightarrow{BC})$, $\overleftrightarrow{AC}$ son paralelas.

Imponiendo que $\left\|\overrightarrow{\mathbb{H}B_{12}}\right\| = 1$ se obtienen, con un largo cálculo, y con $C \notin \mathbb{B}_{12}$, las dos posiblilidades $H = H_1$, $H = H_2$, siguientes:

$$H_1 = \frac{3y^3 + 3\sqrt{3}y^2 + 3yx^2 + 3yx + \sqrt{3}\sqrt{\left(x^2 - x + 1 + \sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{3}y + 3y^2 - 3x + 3x^2\right)^2}}{6\left(x^2 + y^2 - x + 1 + \sqrt{3}y\right)y}$$

$$H_2 = \frac{3y^3 + 3\sqrt{3}y^2 + 3yx^2 + 3yx - \sqrt{3}\sqrt{\left(x^2 - x + 1 + \sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{3}y + 3y^2 - 3x + 3x^2\right)^2}}{6\left(x^2 + y^2 - x + 1 + \sqrt{3}y\right)y}$$

Imponiendo que $\left\|\overrightarrow{\mathbb{H}B_{34}}\right\| = 1$ se obtienen, con un largo cálculo, y con $C \notin \mathbb{B}_{34}$, las dos posiblilidades $H = H_3$, $H = H_4$, siguientes:

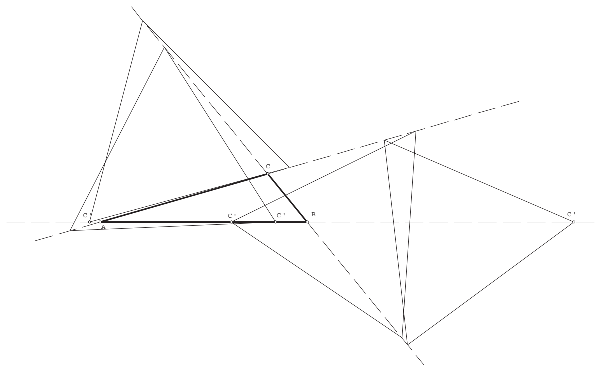
$$H_3 = \frac{3y^3 - 3\sqrt{3}y^2 + 3yx^2 + 3yx + \sqrt{3}\sqrt{\left(x^2 - x + 1 - \sqrt{3}y\right)\left(-\sqrt{3}y + 3y^2 - 3x + 3x^2\right)^2}}{6\left(x^2 + y^2 - x + 1 - \sqrt{3}y\right)y}$$

$$H_4 = \frac{3y^3 - 3\sqrt{3}y^2 + 3yx^2 + 3yx - \sqrt{3}\sqrt{\left(x^2 - x + 1 - \sqrt{3}y\right)\left(-\sqrt{3}y + 3y^2 - 3x + 3x^2\right)^2}}{6\left(x^2 + y^2 - x + 1 - \sqrt{3}y\right)y}$$

El punto C, por las hipótesis, no puede pertenecer a la vez a las dos circunferencias $\mathbb{B}_{12}$ y $\mathbb{B}_{34}$.

Finalmente, con todo lo anterior, se tiene demostrada la existencia de 4 triángulos $\triangle C_i' A_i' B_i'$ -2 en el caso no genérico- que verifican el enunciado del problema. Pero además para la construcción, con regla y compás, de estos 4 triángulos basta construir sus vértices C_i' sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (la construcción de los otros vértices restantes es trivial). Tales vértices C_i' tienen coordenadas $(H_i, 0)$, y por tanto son construibles, con regla y compás, vía la construcción de los segmentos $\mathbb{H}_i$ de longitud $|H_i|$.

Además, también con todo lo anterior -recordar que $y > 0$-, se tiene demostrado que si el vértice C pertenece a la región parabólica $\mathbb{P} = \{(x, y)$ tal que $x^2 - x + 1 < \sqrt{3}y\}$ existen sólo los dos triángulos solución relativos a H_3, H_4; y si el vértice C pertenece a parabóla de ecuación $x^2 - x + 1 = \sqrt{3}y$ existen sólo los tres triángulos solución relativos a $H_1 = H_2$, H_3, H_4.



Como queríamos contruir.■

Blas Herrera. Universitat Rovira i Virgili.