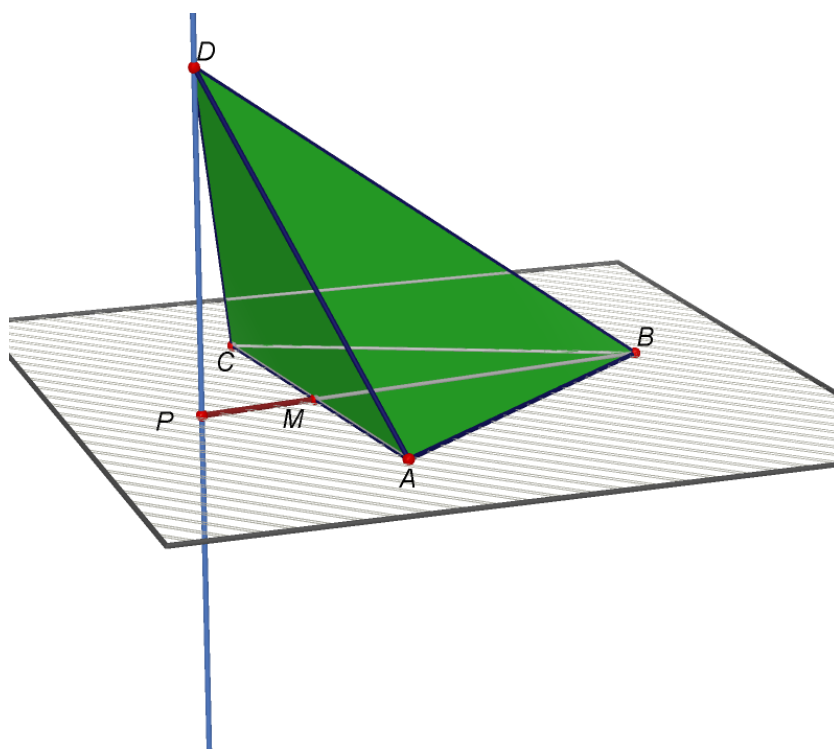


# QUATRE TRIANGLES

35 problemes amb tetraedres



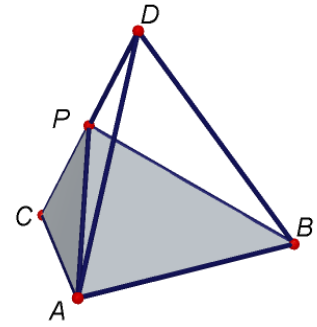
Ricard Peiró i Estruch

**Problema 1**

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{CD}$ .

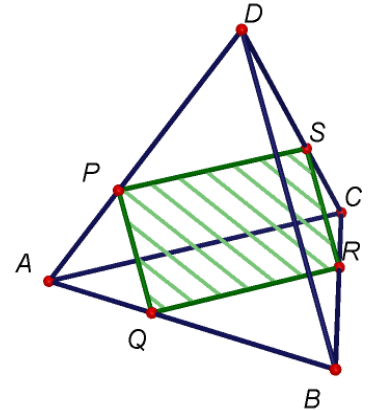
Determineu la proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD.



**Problema 2**

El perímetre de la secció paral·lela a dues arestes que es creuen d'un tetraedre regular és constant.

Calculeu el perímetre.



**Problema 3**

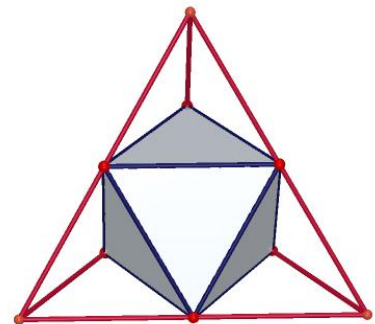
En una piràmide triangular regular l'aresta lateral és igual a tres vegades l'aresta de la base.

Calculeu l'angle diedre d'una aresta lateral.

**Problema 4**

Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre regular són vèrtexs d'un octaedre regular.

Calculeu la proporció entre els volums de l'octaedre i el del tetraedre.



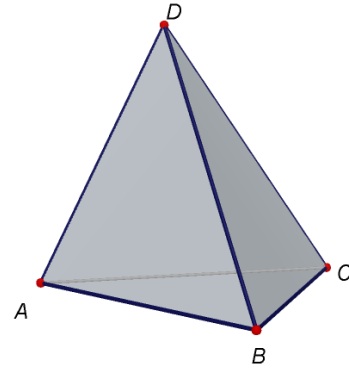
**Problema 5**

La base d'un tetraedre és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8cm i l'aresta lateral sobre l'angle recte de la base és perpendicular a la base i mesura 5cm.

Calculeu l'àrea i el volum del tetraedre.

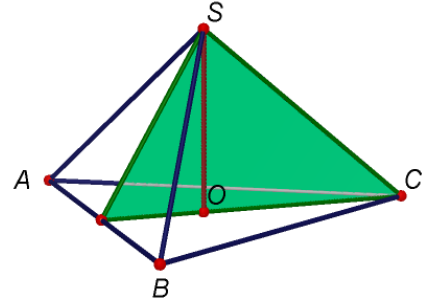
### Problema 6

Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat  $a$  i dos triangles rectangles isòsceles. Calculeu l'àrea i el volum.



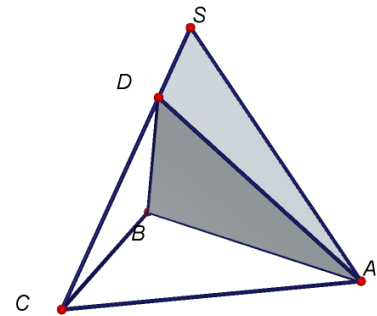
### Problema 7

En la piràmide triangular regular ABCD l'àrea de la secció que passa per l'aresta lateral  $\overline{SC}$  i l'altura  $\overline{SO}$  és la meitat de l'àrea de la base  $\triangle ABC$  de la piràmide. L'aresta lateral és igual  $\sqrt{21}$ . Determineu el volum de la piràmide i la seua àrea.



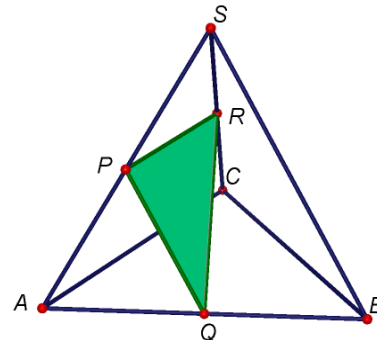
### Problema 8

Siga ABCS un tetraedre regular d'aresta 4.  
Siga D un punt de l'aresta  $\overline{SC}$  tal que  $\overline{SD} : \overline{DC} = 1 : 3$ .  
Determineu el volum del tetraedre ABDS.



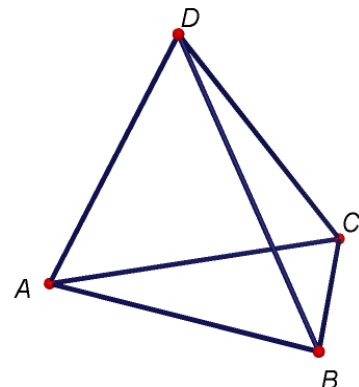
### Problema 9

Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta 6.  
Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{SA}$ .  
Siga Q el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .  
Siga R el punt mig de l'aresta  $\overline{SC}$ .  
Determineu l'àrea del triangle  $\triangle PQR$ .



### Problema 10

La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat  $a$ . Una de les cares laterals, perpendicular al plànol de la base, també és un triangle equilàter. Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.

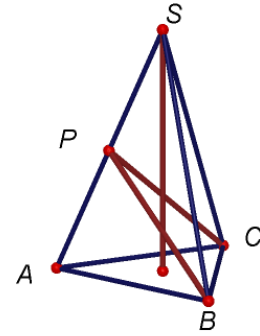


**Problema 11**

Una piràmide ABCS (S el vèrtex) triangular regular l'aresta de la base és 3 i l'altura 4.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{AS}$ .

Calculeu la mesura de l'angle  $\angle BPC$ .



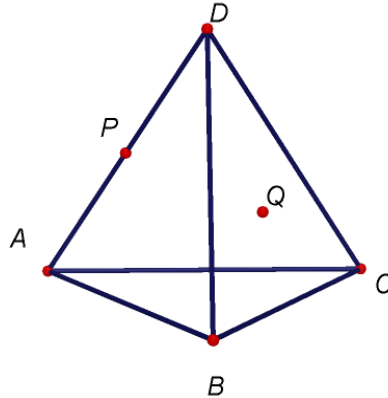
**Problema 12**

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{AD}$ .

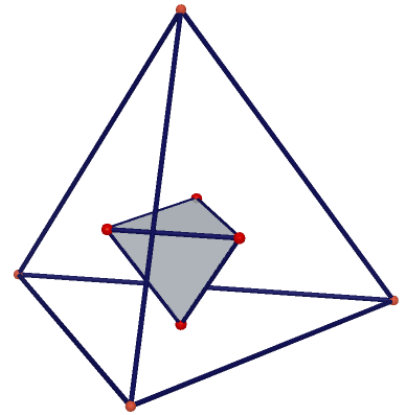
Siga Q el centre de la cara  $\triangle BCD$ .

Calculeu la proporció  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$ .



**Problema 13**

Determineu la proporció entre els volums d'un tetraedre regular i el seu dual (dual és aquest que té per vèrtex els centres de les cares del primer).



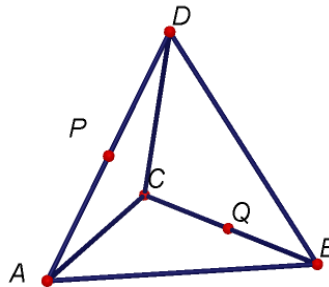
**Problema 14**

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{AD}$ .

Siga Q el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

Calculeu la proporció  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$ .



**Problema 15**

En una piràmide triangular regular l'angle diedre de la base és igual a  $\varphi$ .

Determineu l'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide.

**Problema 16**

L'altura d'una piràmide triangular regular és 4 vegades el radi de la circumferència inscrita a la base. El volum és 36.

Determineu la mesura de l'aresta de la base:

**Problema 17**

Una piràmide regular de base triangular té altura 6 i volum  $72\sqrt{3}$ .

Determineu el radi de l'esfera inscrita a la piràmide.

### Problema 18

Un plànol secant paral·lel a la base d'una piràmide regular triangular divideix per la meitat l'àrea lateral de la piràmide. Determineu la proporció entre els segments en què queda dividida l'altura de la piràmide pel plànol secant.

### Problema 19

En una piràmide triangular regular, per l'aresta de la base de longitud  $a$ , es traça una secció perpendicular a l'aresta lateral oposada. Determineu la superfície de la piràmide si el plànol secant divideix l'aresta lateral en la raó  $m : n$  comptant des del vèrtex de la piràmide.

### Problema 20

Considerem el sistema de referència afí

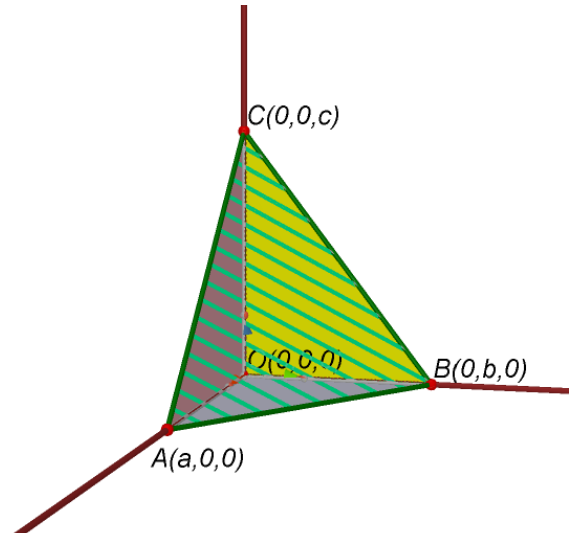
$$\{O; \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}\}$$

Siguen els punts  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$ .

Siguen les àrees:  $P = S_{OAB}$ ,  $Q = S_{OAC}$ ,  $R = S_{OBC}$ ,

$$S = S_{ABC}.$$

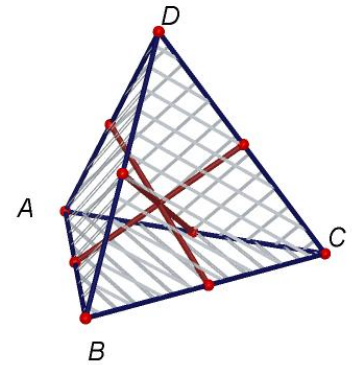
Proveu que  $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$ .



### Problema 21

Siga un tetraedre qualsevol.

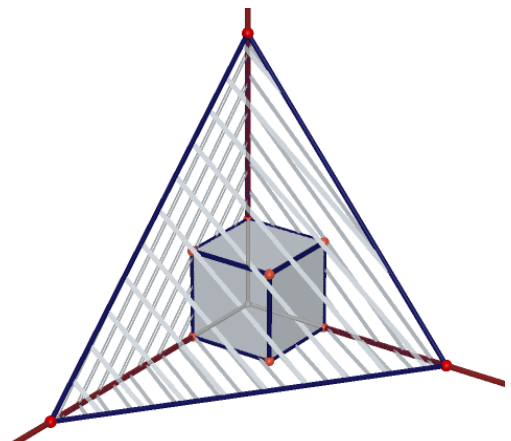
- Els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt
- La suma dels quadrats de les arestes és quatre vegades la suma dels quadrats dels segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades.



### Problema 22

Les arestes d'una piràmide triangular que ixen del vèrtex A són perpendiculars a parelles i les seues mesures són  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Determineu el volum del cub inscrit en la piràmide tal que un dels seus vèrtexs és A.



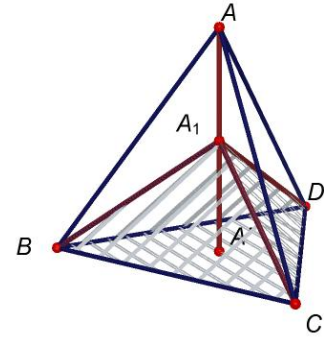
### Problema 23

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta  $a$ .

Siga  $A'$  la projecció de  $A$  sobre la base  $\triangle BCD$ .

Siga  $A_1$  el punt mig del segment  $AA'$ .

Proveu que el tetraedre  $A_1BCD$  té tres cares triangles rectangles.



### Problema 24

La suma dels quadrats de totes les arestes d'una piràmide triangular regular és  $P$ .

Determineu l'àrea màxima d'una cara lateral.

### Problema 25

a) Calculeu el volum màxim d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi  $R$ .

b) Calculeu el valor màxim de la suma de les arestes d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi  $R$ .

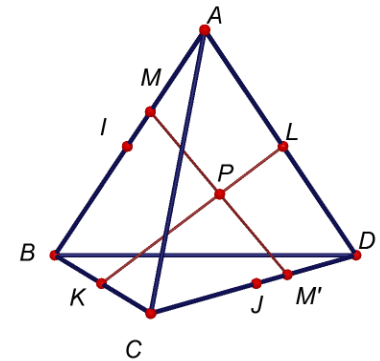
### Problema 26

Siga el tetraedre ABCD.

Siguen  $I, J, K, L$  els punts migs de les arestes  $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{AD}$ , respectivament.

a) Demostreu que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$ .

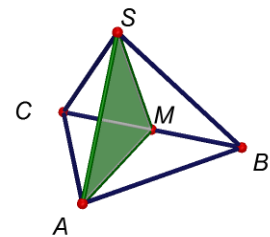
b) Demostreu que per a cada punt  $O$  del segment  $\overline{KL}$  existeixen els punts  $M$  i  $M'$  de les arestes  $\overline{AB}, \overline{CD}$  tal que  $P$  és el punt mig del segment  $\overline{MM'}$ .



### Problema 27

Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

La secció produïda en la piràmide ABCS per un plànol que passa pel vèrtex  $S$  i  $A$ , i pel punt mig  $M$  de l'aresta de la base  $\overline{BC}$  és un triangle equilàter de costat 6cm. Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



### Problema 28

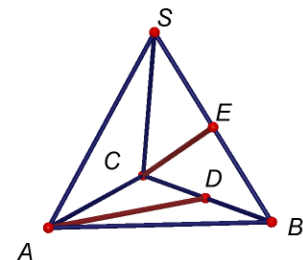
La suma de distàncies d'un punt interior d'un tetraedre regular a les cares és igual a l'altura del tetraedre.

### Problema 29

En el tetraedre regular ABCS,  $\overline{AD}$  és la mitjana del triangle

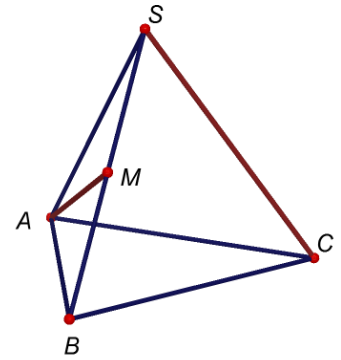
$\triangle ABC$ ,  $E$  és el punt mig de l'aresta  $\overline{BS}$ .

Determineu l'angle que formen les rectes  $AD, CE$ .



**Problema 30**

En el tetraedre regular  $ABCS$ ,  $\overline{AM}$  és la mitjana del triangle  $\triangle ABS$ .  
Determineu l'angle que formen les rectes  $AM$ ,  $CS$ .



**Problema 31**

Siga  $ABCS$  un tetraedre regular.

Calculeu l'angle que formen l'aresta  $\overline{AB}$  i la cara  $\triangle ACS$ .

**Problema 32**

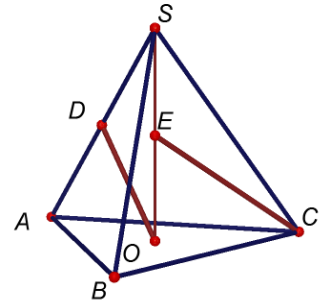
En el tetraedre regular  $ABCS$ , per la mitjana  $\overline{AD}$  de la base  $\triangle ABC$  i  $K$  el punt mig de l'aresta  $\overline{SB}$ , s'ha dibuixat un plànot. Determineu l'angle d'aquest plànot i la base  $\triangle ABC$ .

**Problema 33**

Siga  $D$  el punt mig de l'aresta  $\overline{AS}$  del tetraedre regular  $ABCS$ .

Siga  $E$  el punt mig de l'altura  $\overline{OS}$ .

Determineu l'angle de les rectes  $CE$  i  $DO$ .

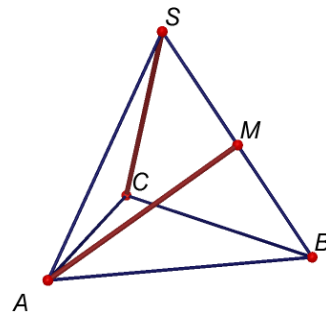


**Problema 34**

Siga  $ABCD$  un tetraedre regular.

Siga  $M$  el punt mig de l'aresta  $\overline{BS}$ .

Calculeu l'angle de la mitjana  $\overline{AM}$  i l'aresta  $\overline{CS}$ .

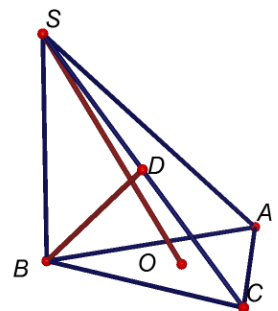


**Problema 35**

En la piràmide triangular  $ABCS$  la base  $\triangle ABC$  és un triangle equilàter i les cares  $\triangle SAB$  i  $\triangle SBC$  són perpendiculars a la base.

Siga l'aresta  $\overline{SB}$  igual a l'aresta  $\overline{AB}$ .

Siga  $O$  el baricentre de la base  $\triangle ABC$ . Siga  $D$  el punt mig de l'aresta  $\overline{SC}$ .  
Calculeu l'angle que formen les rectes  $BD$  i  $SO$ .

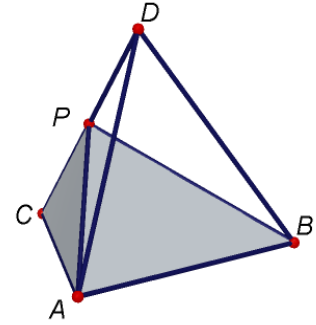


### Problema 1

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{CD}$ .

Determineu la proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD.



Solució:

Siga  $\overline{AB} = a$  aresta del tetraedre regular ABCD:.

L'àrea del tetraedre regular ABCD és:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = a^2 \sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle APC$ :

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMP$ :

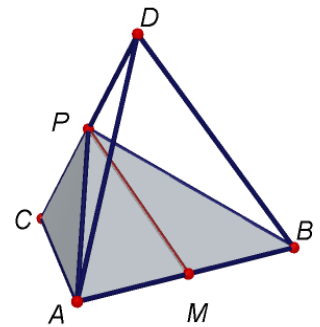
$$\overline{MP} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

L'àrea del tetraedre ABCP és igual a la suma de les àrees dels triangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle APC$ ,  $\triangle BPC$  i  $\triangle APB$ :

$$S_{ABCP} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{APC} + S_{APB} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 2 \left( \frac{\frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} \right) + \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2} a}{2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} a^2.$$

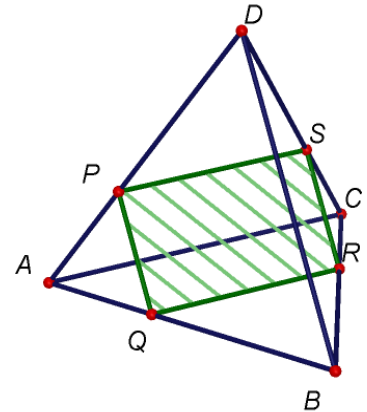
La proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD és:

$$\frac{S_{ABCP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} a^2}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{12} \approx 0.7041.$$



### Problema 2

El perímetre de la secció paral·lela a dues arestes que es creuen d'un tetraedre regular és constant.  
Calculeu el perímetre.



Solució:

Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta  $\overline{AB} = a$ .

Siga PQRS la secció del tetraedre  $\overline{PS}, \overline{QS}$  paral·lels a  $\overline{AC}$ ,

$\overline{PQ}, \overline{RS}$  paral·lels a  $\overline{BD}$ .

$\overline{AC}, \overline{BD}$  són arestes que es creuen.

Siga  $x = \overline{AP}$ ,  $\overline{PD} = a - x$ .

$\triangle APQ$ , és un triangle equilàter, aleshores:

$$\overline{PQ} = \overline{AP} = x.$$

$\triangle PSD$ , és un triangle equilàter, aleshores:

$$\overline{PS} = \overline{PD} = a - x.$$

El perímetre de la secció és:

$$p = 2(\overline{PQ} + \overline{PS}) = 2(x + a - x) = 2a.$$

El perímetre de la secció és constant i igual al doble de l'aresta del tetraedre.

### Problema 3

En una piràmide triangular regular l'aresta lateral és igual a tres vegades l'aresta de la base.

Calculeu l'angle diedre d'una aresta lateral.

Solució:

Siga la piràmide recta  $ABCS$ , on  $\triangle ABC$  és un triangle equilàter.

Siga  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AS} = 3a$ .

Siga  $P$  de l'aresta  $\overline{AS}$  tal que  $\overline{BP} \perp \overline{AS}$ .

L'angle diedre que cerquem és  $\angle BPC = \alpha$ .

Siga  $M$  el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle AMS$ :

$$\overline{MS} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}a.$$

Els triangles rectangles  $\triangle AMS$ ,  $\triangle APB$  són semblants i la raó és 3:1.

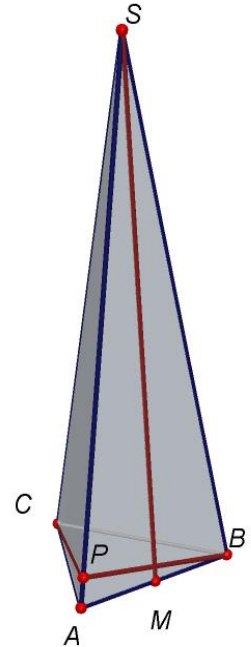
$$\text{Aleshores, } \overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{MS} = \frac{\sqrt{35}}{6}a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle BPC$ :

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{35}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{6}a\right)^2 - 2 \frac{\sqrt{35}}{6} \frac{\sqrt{35}}{6} \cos \alpha.$$

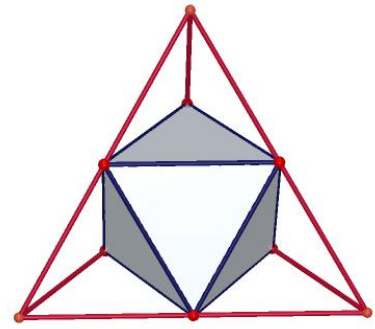
Simplificant:

$$\cos \alpha = \frac{17}{35}, \quad \alpha = \arccos \frac{17}{35} \approx 60^\circ 56' 27''.$$



#### Problema 4

Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre regular són vèrtexs d'un octaedre regular.  
Calculeu la proporció entre els volums de l'octaedre i el del tetraedre.



Solució:

Els punts migs de les arestes que formen les cares formen 4 triangles equilàters de costat la meitat de l'aresta.

Els punts migs de les arestes que s'intersecten en un vèrtex formen 4 triangles equilàters de costat la meitat de l'aresta.

El poliedre resultant està format per 8 cares triangles equilàters iguals 6 vèrtexs i cada vèrtex d'índex 4. El poliedre és un octaedre regular.

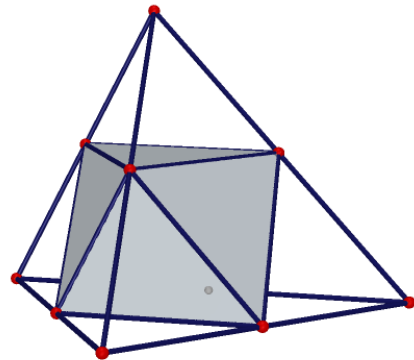
El truncament del tetraedre per la meitat de les arestes separa del tetraedre 4 tetraedres regulars d'aresta la meitat de l'aresta del tetraedre inicial.

Cadascun dels 4 tetraedres té per volum la vuitena part del tetraedre inicial ja que estan en proporció 1:2.

Aleshores el volum de l'octaedre és la meitat del volum tetraedre.

#### Problema

Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre són vèrtexs d'un octaedre tal que les arestes oposades són iguals i paral·leles i el volum del qual és igual a la meitat del volum del tetraedre.



### Problema 5

La base d'un tetraedre és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8cm i l'aresta lateral sobre l'angle recte de la base és perpendicular a la base i mesura 5cm. Calculeu l'àrea i el volum del tetraedre.

Solució:

Siga el tetraedre de base  $\triangle ABC$ ,  $A = 90^\circ$ ,  $\overline{BC} = 8$ .

Siga  $\overline{AD} = 5$ ,  $\angle DAB = \angle DAC = 90^\circ$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles  $\triangle ABC$ :

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABD$ :

$$\overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{57}.$$

El triangle  $\triangle BCD$  és isòsceles.

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CMD$ :

$$\overline{DM} = \sqrt{41}.$$

L'àrea del tetraedre ABCD és:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} + S_{ABC} + S_{BCD}.$$

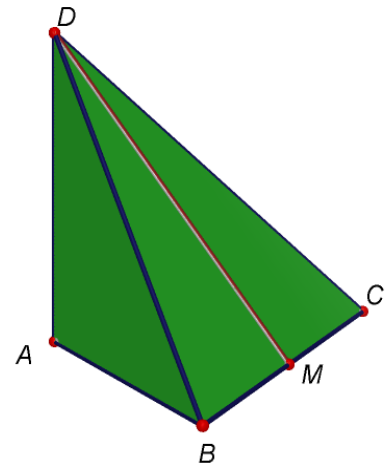
$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = 20\sqrt{2} + 16 + 4\sqrt{41} \approx 69.90\text{cm}^2.$$

El volum del tetraedre és:

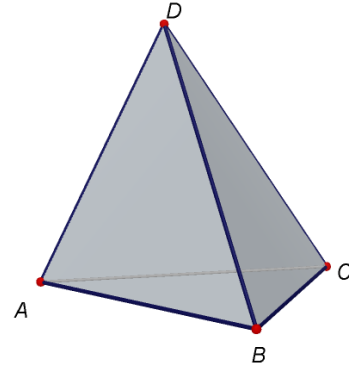
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} 16 \cdot 5 = \frac{80}{3} \approx 26.66\text{cm}^3.$$



### Problema 6

Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat  $a$  i dos triangles rectangles isòsceles. Calculeu l'àrea i el volum.



Solució:

Siga el tetraedre ABCD tal que les cares  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ACD$  són triangles equilàters de costat  $a$ . Siguen  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCD$  les cares que són triangles rectangles isòsceles.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD} = a.$$

$$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

isòsceles  $\triangle ABD$ :

$$\overline{AD} = a\sqrt{2}.$$

L'àrea del tetraedre és:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} + 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} a^2.$$

Siga P la projecció de C sobre la base  $\triangle ABC$ .

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AC}$ .

M pertany al segment  $\overline{PB}$ .

Siga  $\overline{DP} = h$  altura del tetraedre. Siga  $\overline{PM} = x$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMB$ :

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle PMD$ :

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 = x^2 + h^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle PBD$ :

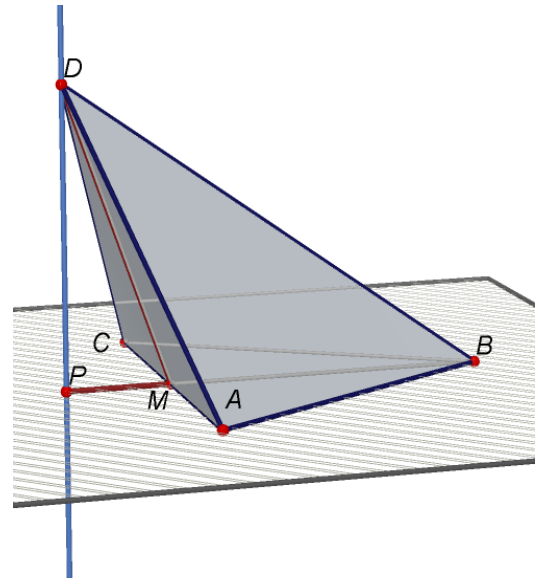
$$(a\sqrt{2})^2 = \left( x + \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 + h^2 \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{3}{4} a^2 = x^2 + h^2 \\ 2a^2 = x^2 + \frac{3}{4} a^2 + \sqrt{3}ax + h^2 \end{cases} \quad \text{La solució és} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6} a \\ h = \frac{\sqrt{6}}{3} a \end{cases}$$

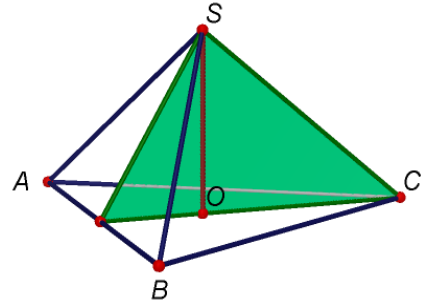
El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$



### Problema 7

En la piràmide triangular regular ABCD l'àrea de la secció que passa per l'aresta lateral  $\overline{SC}$  i l'altura  $\overline{SO}$  és la meitat de l'àrea de la base  $\triangle ABC$  de la piràmide. L'aresta lateral és igual  $\sqrt{21}$ . Determineu el volum de la piràmide i la seua àrea.



Solució:

Siga  $a = \overline{AB}$  arista de la base  $\triangle ABC$  (triangle equilàter).

Per ser la piràmide regular el peu de l'altura  $\overline{SO}$ , és el baricentre del triangle equilàter  $\triangle ABC$ . Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

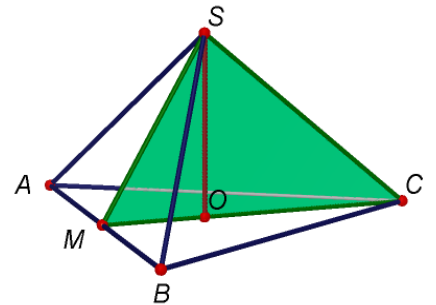
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BMC$ :

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a. \text{ Aplicant la propietat del baricentre O:}$$

$$\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle COS$ :

$$\overline{SO} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{21 - \frac{1}{3}a^2}.$$



L'àrea del triangle  $\triangle CMS$  (secció del plànel que formen  $\overline{SC}$  i l'altura  $\overline{SO}$  és:

$$S_{CMS} = \frac{1}{2}\overline{CM} \cdot \overline{SO} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}a \sqrt{21 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{4}a\sqrt{63 - a^2}.$$

L'àrea de la base  $\triangle ABC$  és:  $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Com que l'àrea del triangle  $\triangle CMS$  és la meitat de l'àrea del triangle  $\triangle ABC$ :

$$\frac{1}{4}a\sqrt{63 - a^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$a = 6. \quad \overline{SO} = 3.$$

El volum de la piràmide ABCS és:  $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{SO} = \frac{1}{3} \frac{6^2\sqrt{3}}{4} 3 = 9\sqrt{3}.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMS$ :

$$\overline{SM} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{21 - 3^2} = 2\sqrt{3}.$$

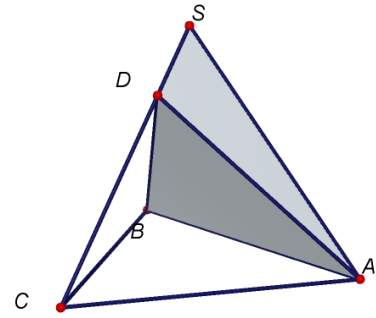
L'àrea de la piràmide ABCS és:  $S_{ABCS} = S_{ABC} + 3 \cdot S_{ABS} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 3 \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}.$

### Problema 8

Siga ABCS un tetraedre regular d'aresta 4.

Siga D un punt de l'aresta  $\overline{SC}$  tal que  $\overline{SD} : \overline{DC} = 1 : 3$ .

Determineu el volum del tetraedre ABDS.



Solució:

$\overline{SD} : \overline{DC} = 1 : 3$ ,  $\overline{SC} = 4$ , Aleshores:

$\overline{DC} = 3$ .

El volum del tetraedre ABDS és igual al volum del tetraedre regular ABCS menys el volum del tetraedre ABCD.

Siga  $\overline{SG}$  l'altura del tetraedre regular ABCS. G és el baricentre de la cara base.

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMC$ :

$$\overline{CM} = 2\sqrt{3}.$$

Aplicant la propietat del baricentre G.

$$\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CM} = \frac{4}{3} \sqrt{3}.$$

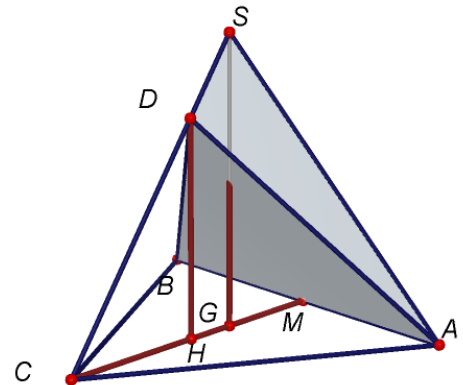
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle CGS$ :

$$\overline{SG} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4}{3} \sqrt{6}.$$

El volum del tetraedre regular ABCS és:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{SG} = \frac{1}{3} \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16}{3} \sqrt{2}.$$



Els triangles rectangles  $\triangle CGS$ ,  $\triangle CHD$  són semblants i la raó de semblança és  $4 : 3$ , aleshores:

$$\overline{DH} = \frac{3}{4} \overline{SG} = \sqrt{6}.$$

El volum del tetraedre ABCD és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{3} \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \sqrt{6} = 4\sqrt{2}.$$

El volum del tetraedre ABDS és:

$$V_{ABDS} = V_{ABCS} - V_{ABCD} = \frac{16}{3} \sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

**Problema 9**

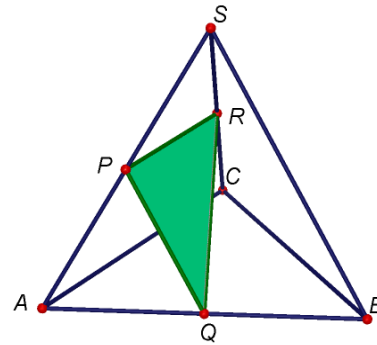
Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta 6.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{SA}$ .

Siga Q el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Siga R el punt mig de l'aresta  $\overline{SC}$ .

Determineu l'àrea del triangle  $\triangle PQR$ .



Solució:

$\overline{PQ}$  és paral·lela mitjana del triangle  $\triangle ABS$ ,  $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{SB} = 3$ .

$\overline{PR}$  és paral·lela mitjana del triangle  $\triangle ACS$ ,  $\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 3$ .

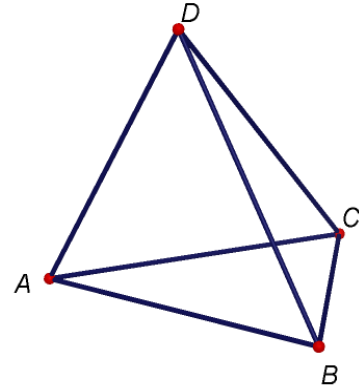
L'angle  $\angle RPQ$  és igual a l'angle que formen  $\overline{AC}$  i  $\overline{SB}$  que és recte.

Aleshores, el triangle  $\triangle PQR$  és rectangle i isòsceles.

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \frac{9}{2}.$$

### Problema 10

La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat  $a$ . Una de les cares laterals, perpendicular al plànol de la base, també és un triangle equilàter. Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:

Siga la piràmide ABCD de base  $\triangle ABC$  triangle equilàter,  $\overline{AB} = a$ .

Siga  $\triangle ABD$  la cara lateral perpendicular a la base i triangle equilàter.

L'àrea dels triangles equilàters  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$  és:

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ . Aplicant el teorema de

Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMD$ :

$$\overline{DM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \text{ és altura de la piràmide.}$$

El volum és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{1}{8} a^3.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles  $\triangle DMC$ :

$$\overline{CD} = \overline{CM} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} a.$$

Els triangles  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ACD$  són iguals i isòsceles.

Siga N el punt mig de l'aresta  $\overline{CD}$ .

$$\overline{CN} = \frac{\sqrt{6}}{4} a. \angle BNC = 90^\circ. \text{ Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle } \triangle BNC:$$

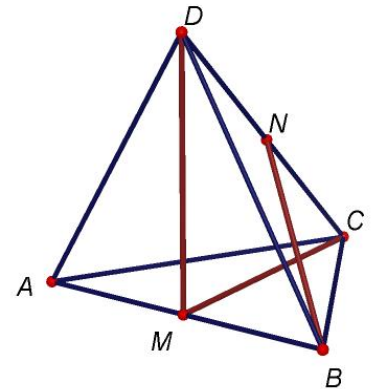
$$\overline{BN} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} a.$$

L'àrea dels triangles  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ACD$  és:

$$S_{BCD} = S_{ACD} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{BN}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} a \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} a}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8} a^2.$$

L'àrea de la piràmide és:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} + 2S_{BCD} = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 2 \frac{\sqrt{15}}{8} a^2 = \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} + \sqrt{15}).$$

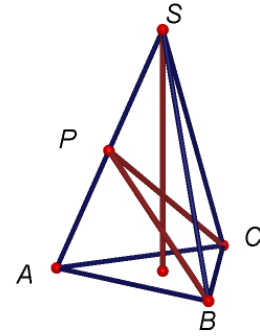


### Problema 11

Una piràmide ABCS (S el vèrtex) triangular regular l'aresta de la base és 3 i l'altura 4.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{AS}$ .

Calculeu la mesura de l'angle  $\angle BPC$ .



Solució:

La base  $\triangle ABC$  és un triangle equilàter de costat  $\overline{AB} = 3$ .

Siga G el baricentre del triangle  $\triangle ABC$ .

L'altura de la piràmide és  $\overline{SG} = 4$ .

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMB$ :

$$\overline{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant la propietat del baricentre G:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AGS$ :

$$\overline{AS} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19}.$$

$$\overline{AS} = \overline{BS}$$

La mitjana  $\overline{BP}$  del triangle  $\triangle ABS$  mesura:  $\overline{BP} = \frac{\sqrt{2\overline{BS}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{AS}^2}}{2}$ :

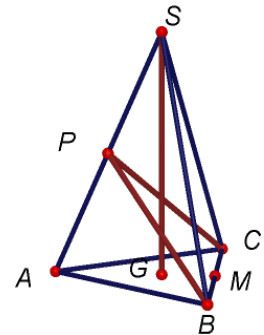
$$\overline{BS} = \frac{\sqrt{2 \cdot 19 + 2 \cdot 9 - 19}}{2} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Siga  $\alpha = \angle BPC$ , aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle BPC$ :

$$3^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - 2 \frac{\sqrt{37}}{2} \frac{\sqrt{37}}{2} \cos \alpha. \text{ Simplificant:}$$

$$\cos \alpha = \frac{19}{37}.$$

$$\alpha = \arccos \frac{19}{37} \approx 59^\circ 6' 7''.$$



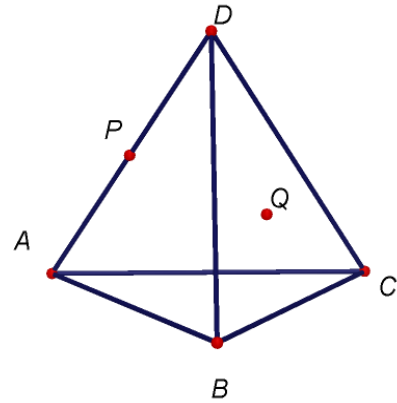
### Problema 12

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{AD}$ .

Siga Q el centre de la cara  $\triangle BCD$ .

Calculeu la proporció  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$ .



Solució:

Siga  $a = \overline{AB}$  aresta del tetraedre regular.

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

$$\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Siga  $\alpha = \angle ADM$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle AMD$ :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos \alpha. \text{ Simplificant:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant la propietat del baricentre Q del triangle  $\triangle BCD$ :

$$\overline{DQ} = \frac{2}{3}\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle PQD$ :

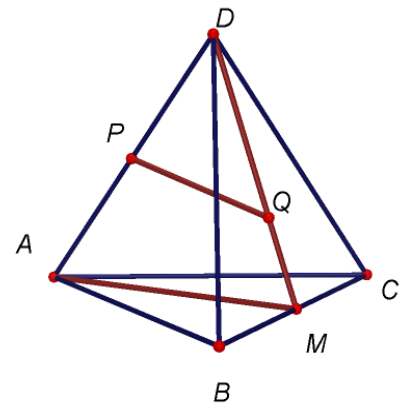
$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2 \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2 \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Simplificant:

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}a.$$

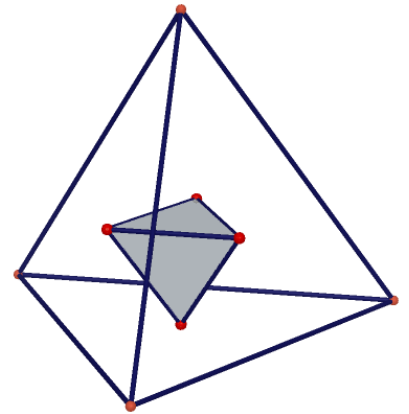
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$$



Notem que el triangle  $\triangle DPQ$  és isòsceles, aleshores, els triangles  $\triangle DPQ$ ,  $\triangle AMD$  són semblants i la raó de semblança és  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

### Problema 13

Determineu la proporció entre els volums d'un tetraedre regular i el seu dual (dual és aquest que té per vèrtex els centres de les cares del primer).



Solució:

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta  $a = \overline{AB}$ .

Siga PQRS el tetraedre dual, P centre de la cara  $\triangle ABD$  i Q centre de la cara  $\triangle BCD$ .

Els dos tetraedres regulars són semblants, la proporció entre els volums és el cub de la proporció de les seues arestes.

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Siga N el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

$\overline{MN}$  és paral·lela mitjana del triangle  $\triangle ABC$ , aleshores:

$$\overline{MN} = \frac{a}{2}.$$

Els triangles  $\triangle MDN$ ,  $\triangle PDQ$  són semblants.

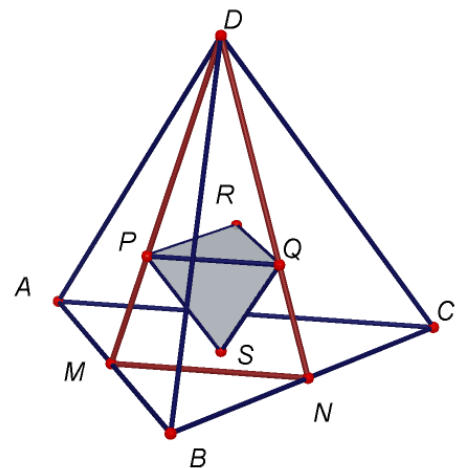
Per la propietat del baricentre P del triangle  $\triangle ABD$ .

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DM}} = \frac{2}{3}, \text{ aleshores:}$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Per tant, } \overline{PQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}a.$$

$$\frac{V_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \left( \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} \right)^3 = \left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$



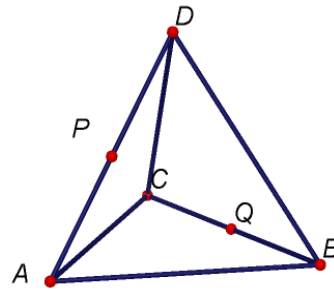
**Problema 14**

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta  $\overline{AD}$ .

Siga Q el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

Calculeu la proporció  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$ .



Solució:

Siga  $a = \overline{AB}$  aresta del tetraedre regular.

El peu de l'altura del tetraedre regular sobre la base  $\triangle ABC$  és el baricentre G del triangle equilàter.

Siga  $\alpha = \angle DAQ$ .

$$\overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant la propietat del baricentre G:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle AGD$ :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle APQ$ :

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right)^2 - 2 \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot \cos \alpha$$

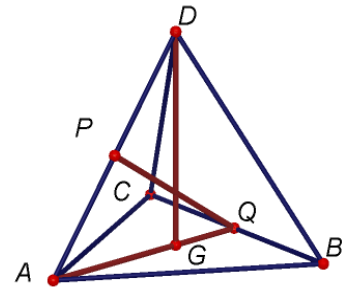
$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 - 2 \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Simplificant:

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Notem que el triangle  $\triangle APQ$  és rectangle ja que  $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$ .



### Problema 15

En una piràmide triangular regular l'angle diedre de la base és igual a  $\varphi$ .  
Determineu l'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide.

Solució:

La piràmide és triangular regular, és a dir, la base és un triangle equilàter i és recta.

Siga  $\triangle ABCD$  la piràmide triangular regular, de base  $\triangle ABC$  triangle equilàter.

Siga  $G$  el peu de l'altura.  $G$  és el baricentre del triangle  $\triangle ABC$ .

Siga  $a = \overline{AB}$  aresta de la base

Siga  $M$  el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$  de la base.

$$\overline{AM} = \frac{a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMC$ :

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\overline{GM} = \frac{1}{3} \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle DGM$ :

$$\overline{DM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} a}{\cos \varphi}.$$

Siga  $\alpha = \angle ADM$ .

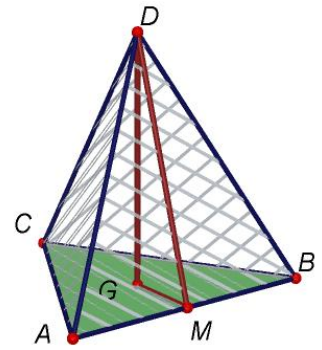
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle ADM$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\frac{\sqrt{3}}{6} a}{\cos \varphi}} = \sqrt{3} \cos \varphi.$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cos \varphi).$$

L'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide és:

$$2\alpha = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cos \varphi).$$



### Problema 16

L'altura d'una piràmide triangular regular és 4 vegades el radi de la circumferència inscrita a la base. El volum és 36.

Determineu la mesura de l'aresta de la base:

Solució:

Siga  $ABCS$  la piràmide de base el triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

Siga  $M$  el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Siga  $O$  l'incentre del triangle  $\triangle ABC$ .

Siga  $r = \overline{OM}$  radi de la circumferència inscrita al triangle  $\triangle ABC$ .

L'altura de la piràmide és  $\overline{OS} = 4r$ .

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle AMO$ :

$$\overline{AM} = r\sqrt{3}.$$

$$\overline{AB} = 2r\sqrt{3}.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3} \frac{\overline{AB}^2 \sqrt{3}}{4} \overline{OS}.$$

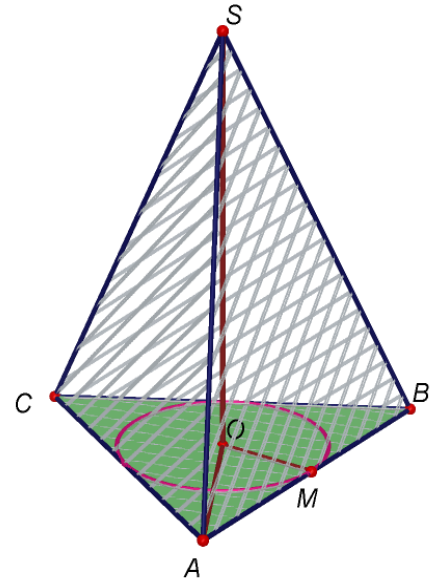
$$\frac{1}{3} \frac{(2r\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} 4r = 36.$$

$$r^3 = 3\sqrt{3}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$r = \sqrt{3}.$$

L'aresta de la base mesura:

$$\overline{AB} = 2r\sqrt{3} = 6.$$



### Problema 17

Una piràmide regular de base triangular té altura 6 i volum  $72\sqrt{3}$ .  
Determineu el radi de l'esfera inscrita a la piràmide.

Solució:

La piràmide regular aleshores, és recta i la base un triangle equilàter.

Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

L'altura de la piràmide s'intersecta en el baricentre G del

triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

El centre de O l'esfera pertany a l'altura  $\overline{DG}$

El punt de tangència T de l'esfera i la cara  $\triangle BCD$  pertany a l'apotema  $\overline{DM}$ .

$\overline{OT}$  és perpendicular a l'apotema  $\overline{DM}$ .

Siga  $\overline{OT} = \overline{OG} = r$  radi de l'esfera.

Siga la secció  $\triangle GMD$  de la piràmide que conté l'altura i l'apotema de la cara  $\triangle BCD$ .

Siga  $a = \overline{AB}$ , aresta de la base.

$$V_p = \frac{1}{3} S_b h.$$

$$V_p = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} 6 = 72\sqrt{3}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$a = 12.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABM$ :

$$\overline{AM} = 6\sqrt{3}.$$

Per la propietat del baricentre:

$$\overline{GM} = \frac{1}{3} \overline{AM} = 2\sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle DGM$ :

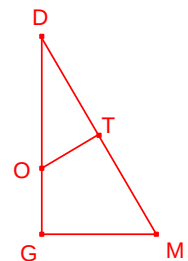
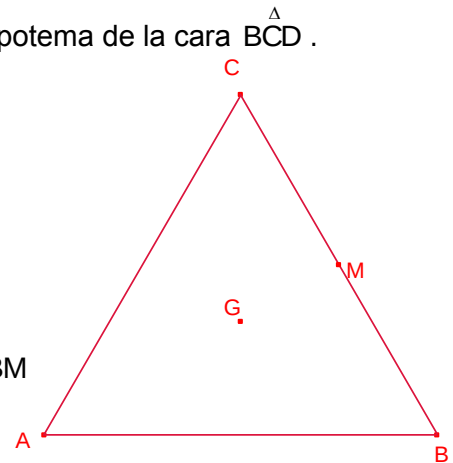
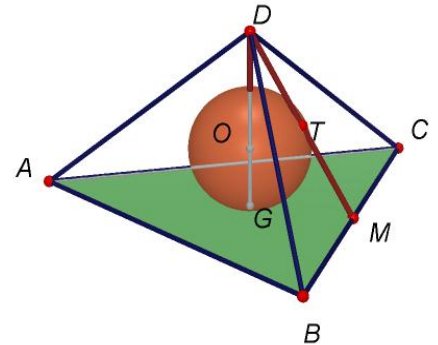
$$\overline{DM} = 6^2 + (2\sqrt{3})^2.$$

$$\overline{DM} = 4\sqrt{3}.$$

Els triangles  $\triangle DGM$ ,  $\triangle DTO$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{r}{6-r}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$r = 2.$$



### Problema 18

Un plànol secant paral·lel a la base d'una piràmide regular triangular divideix per la meitat l'àrea lateral de la piràmide. Determineu la proporció entre els segments en què queda dividida l'altura de la piràmide pel plànol secant.

Solució:

Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

El peu de l'altura és el baricentre G del triangle  $\triangle ABC$ .

El plànol secant talla les arestes laterals de la piràmide en els punts A', B', C', i la l'altura  $\overline{DG}$  en el punt G'.

Volem calcular  $\frac{\overline{DG'}}{\overline{G'G}}$ .

Els triangles  $\triangle ABD$ ,  $\triangle A'B'D$  són semblants i la raó de les àrees és 2:1.

Aleshores, la raó dels costats és  $\sqrt{2} : 1$ .

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

$\overline{A'B'}$  talla  $\overline{DM}$  en el punt P.

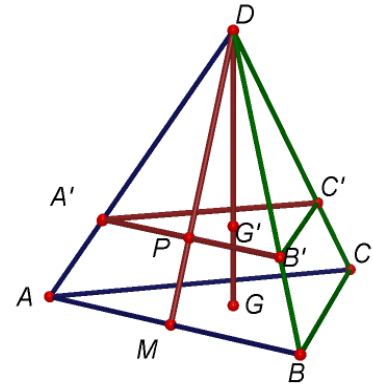
$\overline{DM} : \overline{DP} = \sqrt{2} : 1$ .

Els triangles  $\triangle DGM$ ,  $\triangle DG'P$  són semblants i la raó de semblança és:

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{DP}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Aleshores, } \frac{\overline{DG}}{\overline{DG'}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{\overline{DG'}}{\overline{G'G}} = \frac{\overline{DG'}}{\overline{DG} - \overline{DG'}} = \frac{\frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}}{1 - \frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$



### Problema 19

En una piràmide triangular regular, per l'aresta de la base de longitud  $a$ , es traça una secció perpendicular a l'aresta lateral oposada. Determineu la superfície de la piràmide si el plànol secant divideix l'aresta lateral en la raó  $m : n$  comptant des del vèrtex de la piràmide.

Solució:

Siga la piràmide regular triangular ABCS, d'aresta de la base  $\overline{AB} = a$

Siga el triangle  $\triangle ABP$  secció per l'aresta  $\overline{AB}$  perpendicular a l'aresta lateral  $\overline{SC}$ .

Siga  $\overline{SP} = mx$ ,  $\overline{PC} = nx$ .  $\overline{SB} = \overline{SC} = (m+n)x$ .

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BMC$ :

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MPC$ :

$$\overline{MP}^2 = \frac{3}{4}a^2 - n^2x^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BMS$ :

$$\overline{MS}^2 = (m+n)^2x^2 - \frac{1}{4}a^2 \quad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MPS$ :

$$\overline{MP}^2 = \overline{MS}^2 - m^2x^2 \quad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$$\overline{MP}^2 = (m+n)^2x^2 - \frac{1}{4}a^2 - m^2x^2 \quad (4)$$

Igualant les expressions (1) (4):

$$\frac{3}{4}a^2 - n^2x^2 = (m+n)^2x^2 - \frac{1}{4}a^2 - m^2x^2.$$

Resolent l'equació:

$$x^2 = \frac{a^2}{2n(m+n)} \quad (5)$$

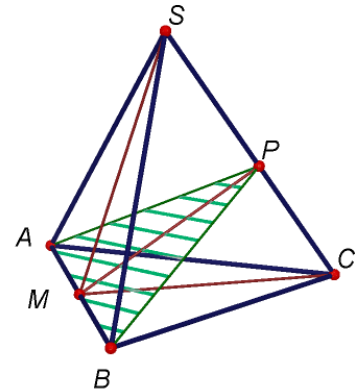
Substituint l'expressió (5) en l'expressió (2):

$$\overline{MS}^2 = (m+n)^2 \frac{a^2}{2n(m+n)} - \frac{1}{4}a^2 = \left( \frac{2m+n}{4n} \right) a^2 \quad (6)$$

La superfície total de la piràmide ABCS és:

$$S_{ABCS} = S_{ABC} + 3 \cdot S_{ABS} = S_{ABC} + 3 \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MS}}{2}.$$

$$S_{ABCS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2m+n}{n}}}{2} = \frac{a^2}{4} \left( \sqrt{3} + 3\sqrt{\frac{2m+n}{n}} \right).$$



### Problema 20

Considerem el sistema de referència afí

$$\{O; \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}\}$$

Siguen els punts  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,

$C(0, 0, c)$ .

Siguen les àrees:  $P = S_{OAB}$ ,  $Q = S_{OAC}$ ,

$R = S_{OBC}$ ,  $S = S_{ABC}$ .

Proveu que  $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$ .

Solució:

$\triangle OAB$ ,  $\triangle OAC$ ,  $\triangle OBC$  són triangles rectangles.

$$P = S_{OAB} = \frac{1}{2}|ab|.$$

$$Q = S_{OAC} = \frac{1}{2}|ac|.$$

$$R = S_{OBC} = \frac{1}{2}|bc|.$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \frac{1}{4}((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2).$$

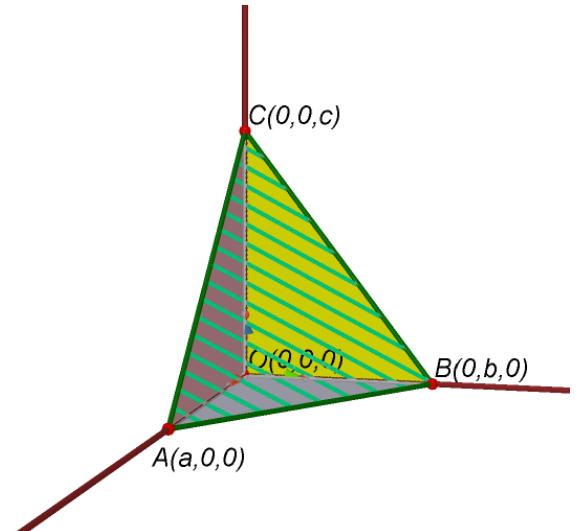
$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab).$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|(bc, ac, ab)\| = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}.$$

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}.$$

$$S^2 = \frac{1}{4}((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2).$$



$$S = \text{àrea}ABC = 10,6 \text{ cm}^2$$

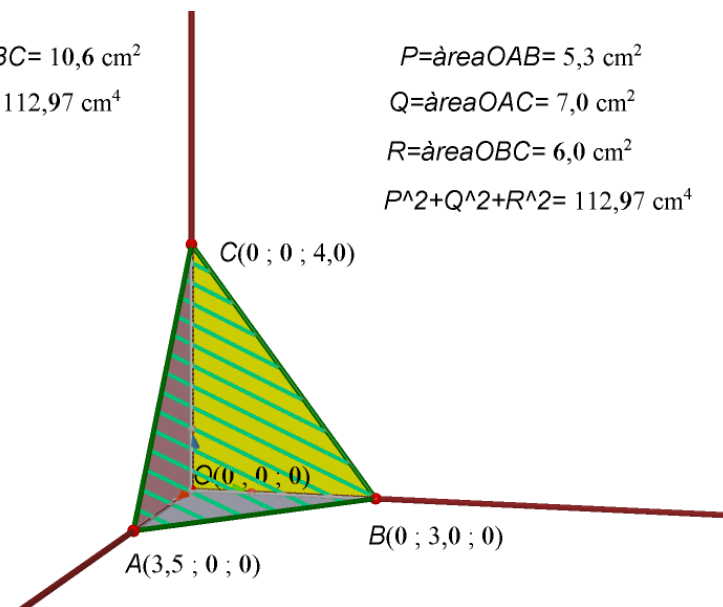
$$S^2 = 112,97 \text{ cm}^4$$

$$P = \text{àrea}OAB = 5,3 \text{ cm}^2$$

$$Q = \text{àrea}OAC = 7,0 \text{ cm}^2$$

$$R = \text{àrea}OBC = 6,0 \text{ cm}^2$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 112,97 \text{ cm}^4$$



### Problema 21

Siga un tetraedre qualsevol.

- Els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt
- La suma dels quadrats de les arestes és quatre vegades la suma dels quadrats dels segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades.

Solució:

a)

Siguen K i L els punts mig de les arestes oposades  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$ , respectivament.

Siguen M i N els punts mig de les arestes oposades  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ , respectivament.

$\overline{KN}$  és paral·lela mitjana del triangle  $\triangle ACD$ .

$\overline{ML}$  és paral·lela mitjana del triangle  $\triangle ACB$ .

Aleshores,  $MLNK$  és un paral·lelogram.

Les diagonals  $\overline{KL}$ ,  $\overline{MN}$  del paral·lelogram s'intersecten en el punt mig dels dos segments.

Anàlogament,  $MINJ$  és un paral·lelogram.

Per tant, Les diagonals  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{MN}$  del paral·lelogram s'intersecten en el punt mig dels dos segments.

Aleshores, els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt, a més a més, aquest punt és el punt mig dels tres segments.

### b) Solució per a tetraedre regular

Siga el tetraedre regular  $ABCD$  d'aresta  $\overline{AB} = a$

Siga  $\overline{DH}$  altura del tetraedre.

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Siga N el punt mig de l'aresta  $\overline{CD}$  oposada a l'aresta  $\overline{AB}$ .

H és el baricentre del triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

$$\overline{CM} = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Aplicant la propietat del baricentre: } \overline{CH} = \frac{2}{3} \overline{CM} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CHD$ :

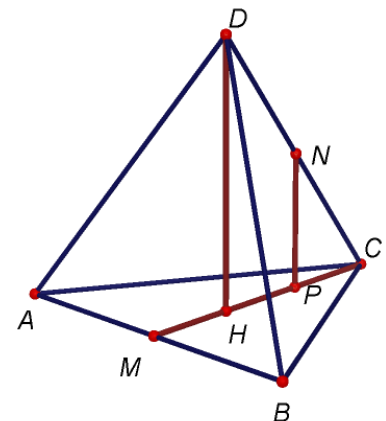
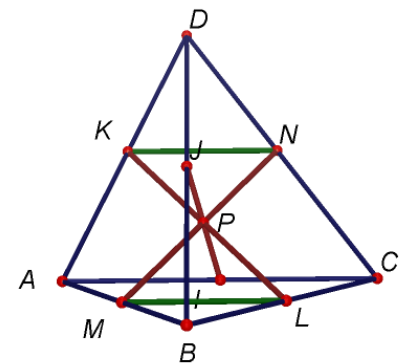
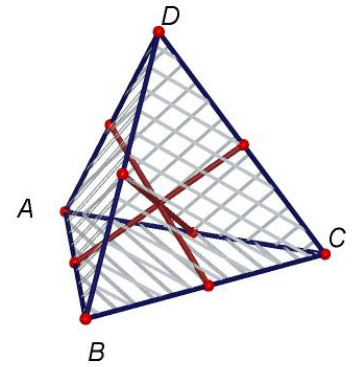
$$\overline{DH} = a \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Siga P la projecció de N sobre el triangle  $\triangle ABC$ .

Els triangles  $\triangle CHD$ ,  $\triangle CPN$  són semblants i de raó 2:1.

$$\text{Aplicant el teorema de Tales: } \overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{DN} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\overline{MP} = \overline{MH} + \overline{HP} = \frac{2}{3} \overline{MC} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MPN$  :  $\overline{MN}^2 = \frac{1}{2}a^2$ .

La suma dels quadrats de les arestes del tetraedre regular ABCD és:  $6\overline{AB}^2 = 6a^2$ .

La suma dels quadrats dels tres segments que uneixen els punts migs les arestes del tetraedre equilàter ABCD és:  $3\overline{MN}^2 = 3\frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$ .

Notem que  $6 \cdot \overline{AB}^2 = 4 \cdot 3 \cdot \overline{MN}^2$ .

### Solució general

Sense pèrdua de generalitat, siga el tetraedre ABCD amb les següents coordenades cartesianes.

$A(0, 0, 0)$ ,  $B(b, 0, 0)$ ,  $C(a, c, 0)$ ,  $D(d, e, f)$ .

$\overline{AB} = (b, 0, 0)$ ,  $\overline{AC} = (a, c, 0)$ ,  $\overline{BC} = (a-b, c, 0)$ ,

$\overline{BD} = (d-b, e, f)$ ,  $\overline{AD} = (d, e, f)$ ,  $\overline{CD} = (d-a, e-c, f)$ .

$\overline{AB}^2 = b^2$ .

$\overline{AC}^2 = a^2 + c^2$ .

$\overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab$ .

$\overline{BD}^2 = b^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2bd$ .

$\overline{AD}^2 = d^2 + e^2 + f^2$ .

$\overline{CD}^2 = a^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2ad - 2ce$ .

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 2(ab + bd + ad + ce)$

Siguen I i J els punts mig de les arestes oposades  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ , respectivament.

Les seues coordenades són:

$I\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}, 0\right)$ ,  $J\left(\frac{b+d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right)$ ,  $\overline{IJ} = \left(\frac{b+d-a}{2}, \frac{e-c}{2}, \frac{f}{2}\right)$ .

$\overline{IJ}^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(bd - ce - ab - ad))$ .

Siguen K i L els punts mig de les arestes oposades  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$ , respectivament.

Les seues coordenades són:

$K\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right)$ ,  $L\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}, 0\right)$ ,  $\overline{KL} = \left(\frac{a+b-d}{2}, \frac{c-e}{2}, \frac{-f}{2}\right)$ .

$\overline{KL}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ab - ad - bd - ce))$ .

Siguen M i N els punts mig de les arestes oposades  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ , respectivament.

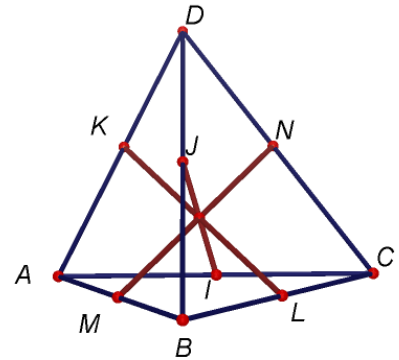
Les seues coordenades són:

$M\left(\frac{b}{2}, 0, 0\right)$ ,  $N\left(\frac{a+d}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{f}{2}\right)$ ,  $\overline{MN} = \left(\frac{a+d-b}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{f}{2}\right)$ .

$\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad - ab - bd + ce))$ .

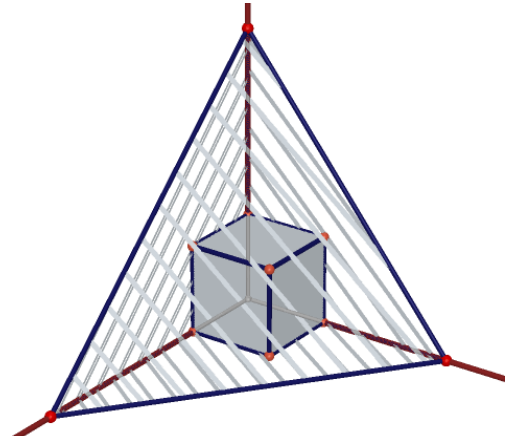
$\overline{IJ}^2 + \overline{KL}^2 + \overline{MN}^2 = \frac{1}{4}(3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 2(ab + bd + ad + ce))$ .

$4(\overline{IJ}^2 + \overline{KL}^2 + \overline{MN}^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 2(ab + bd + ad + ce)$ .



### Problema 22

Les arestes d'una piràmide triangular que ixen del vèrtex A són perpendiculars a parelles i les seues mesures són a, b, c.  
Determineu el volum del cub inscrit en la piràmide tal que un dels seus vèrtexs és A.



Solució:

Siga la piràmide triangular APQR,  $\overline{AP} = a$ ,  $\overline{AQ} = b$ ,  $\overline{AR} = c$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle APQ$ :

$$\overline{PQ} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Siga K en l'aresta  $\overline{AR}$  vèrtex del cub inscrit en la piràmide.

Siga  $\overline{AK} = x$ , aresta del cub.

Siga  $\overline{KL} = x\sqrt{2}$  diagonal de la cara superior del cub.

La recta RL talla l'aresta  $\overline{PQ}$  en el punt M.

$\angle PAM = 45^\circ$ . AM és bisectriu de  $\angle PAQ$ .

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle  $\triangle APQ$ :

$$\frac{\overline{PM}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \overline{PM}}{b}.$$

$$\overline{PM} = \frac{a}{a+b} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle APM$ :

$$\frac{\overline{PM}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AM}}{\sin \angle APM}.$$

$$\frac{\frac{a}{a+b} \sqrt{a^2 + b^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{AM}}{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

$$\overline{AM} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

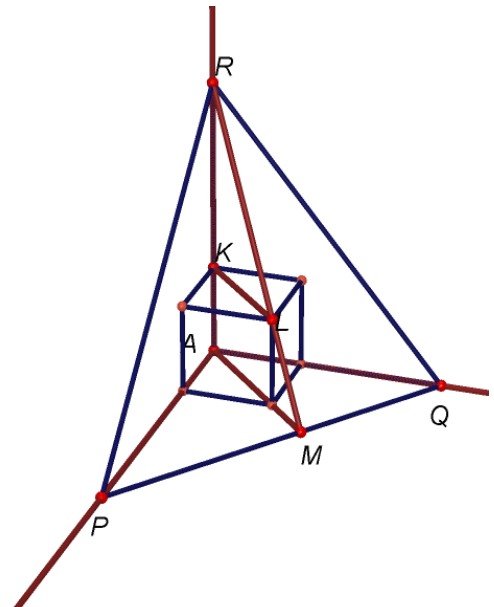
Els triangles rectangles  $\triangle MAR$ ,  $\triangle LKR$  són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x\sqrt{2}}{c-x} = \frac{\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{c}.$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

$$\text{El volum del cub és: } V_{\text{cub}} = x^3 = \left( \frac{abc}{ab + bc + ca} \right)^3.$$



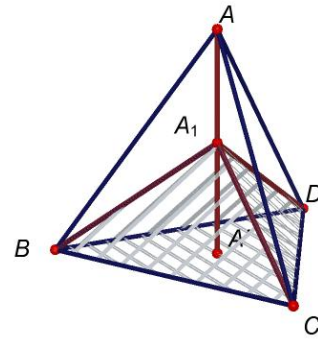
### Problema 23

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta a.

Siga A' la projecció de A sobre la base  $\triangle BCD$ .

Siga A<sub>1</sub> el punt mig del segment AA'.

Proveu que el tetraedre A<sub>1</sub>BCD té tres cares triangles rectangles.



Solució:

Els triangles AA'B, AA'C, AA'D són rectangles i d'hipotenusa a, aleshores:

$$\overline{BA'} = \overline{CA'} = \overline{DA'} = \sqrt{a^2 - \overline{AA'}^2}.$$

Aleshores, A' és el circumcentre (també el baricentre) del triangle equilàter BCD.

Siga M el punt mig de l'aresta CD.

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Per la propietat del baricentre:

$$\overline{BA'} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle BA'A :

$$\overline{AA'} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

$$\overline{A'A_1} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle BA'A<sub>1</sub> :

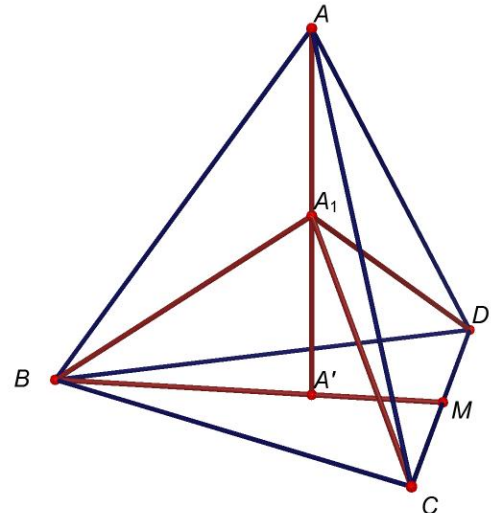
$$\overline{BA_1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \overline{DA_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Notem que  $\overline{BA_1}^2 + \overline{CA_1}^2 = \overline{BC}^2$ . Aleshores, el

triangle BA<sub>1</sub>C és rectangle.

Aleshores, el tetraedre A<sub>1</sub>BCD té tres cares triangles rectangles.



### Problema 24

La suma dels quadrats de totes les arestes d'una piràmide triangular regular és  $P$ .  
Determineu l'àrea màxima d'una cara lateral.

Solució:

Siga  $\triangle ABCD$  la piràmide triangular de base  $\triangle ABC$  triangle equilàter.

Siga  $\overline{AB} = a$  aresta de la base. Siga  $\overline{AD} = b$  aresta lateral.

Per hipòtesi  $3(a^2 + b^2) = P$ .

Siga  $O$  el baricentre de la base  $\triangle ABC$ . Siga  $M$  el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMC$ :

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle COD$ :

$$\overline{OD}^2 = b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle DOM$ :

$$\overline{DM}^2 = \overline{OD}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2. \quad \overline{SM}^2 = b^2 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}a^2.$$

$$\overline{DM}^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

L'àrea de la cara lateral  $\triangle ABD$  és:

$$S(a, b) = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}. \quad b^2 = \frac{P}{3} - a^2. \quad S(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{P}{3} - a^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$

$$S(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}a^2 - \frac{5}{4}a^4}, \quad a > 0.$$

L'àrea màxima s'assoleix en el màxim de la funció  $f(a) = \frac{P}{3}a^2 - \frac{5}{4}a^4$ .

Derivem la funció  $f(a)$ :

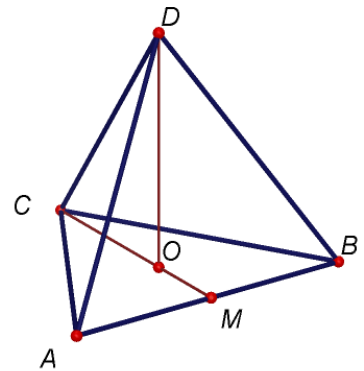
$$f'(a) = \frac{2P}{3}a - 5a^3.$$

$$f'(a) = 0, \quad \frac{2P}{3}a - 5a^3 = 0. \quad \text{Resolent l'equació: } a = \sqrt{\frac{2P}{15}}.$$

$$f''(a) = \frac{2P}{3} - 15a^2. \quad f''\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right) = \frac{2P}{3} - 15 \frac{2P}{15} = -\frac{14P}{3} < 0.$$

Aleshores, el màxim s'assoleix quan  $a = \sqrt{\frac{2P}{15}}$ .

$$\text{L'àrea màxima és: } S\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)^4} = \frac{P\sqrt{5}}{30}.$$



### Problema 25

- a) Calculeu el volum màxim d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi  $R$ .  
b) Calculeu el valor màxim de la suma de les arestes d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi  $R$ .

Solució:

Siga l'esfera de centre  $O$  i radi  $R$

Siga la piràmide  $ABCS$  de base el triangle equilàter  $\triangle ABC$

Siga  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = b$ .

Siga  $G$  el baricentre.

$\overline{OS} = \overline{OA} = R$ . Siga  $\alpha = \angle AOS$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle AOS$

$$b^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \alpha.$$

$$b = R\sqrt{2 - 2\cos \alpha}.$$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle AOG$ .

$$a = R\sqrt{3} \sin \alpha.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AGS$ :

$$\overline{SG}^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} R\sqrt{3} \sin \alpha \right)^2.$$

$$\overline{SG} = R\sqrt{2 - 2\cos \alpha - \sin^2 \alpha}$$

a)

El volum de la piràmide  $ABCS$  és:

$$V = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \overline{SG}.$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} 3R^2 \sin^2 \alpha \cdot R\sqrt{2 - 2\cos \alpha - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

$$V(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3 \sqrt{2\sin^4 \alpha - 2\sin^4 \alpha \cos \alpha - \sin^6 \alpha}.$$

$$V'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3 \frac{8\sin^3 \alpha \cos \alpha - 8\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^5 \alpha - 6\sin^5 \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{2\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha - \sin^6 \alpha}}.$$

$$V'(\alpha) = 0.$$

$$8\sin^3 \alpha \cos \alpha - 8\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^5 \alpha - 6\sin^5 \alpha \cos \alpha = 0. \text{ Simplificant:}$$

$$4\cos \alpha - 4\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha = 0.$$

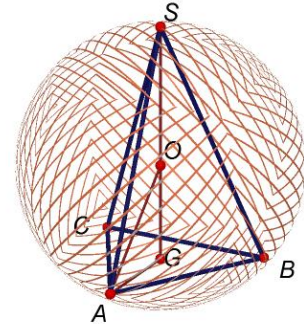
$$4\cos \alpha - 4\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha = 0.$$

$$3\cos^3 \alpha - 5\cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1 = 0.$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{3}.$$

Estudiant el signe de la primera derivada:

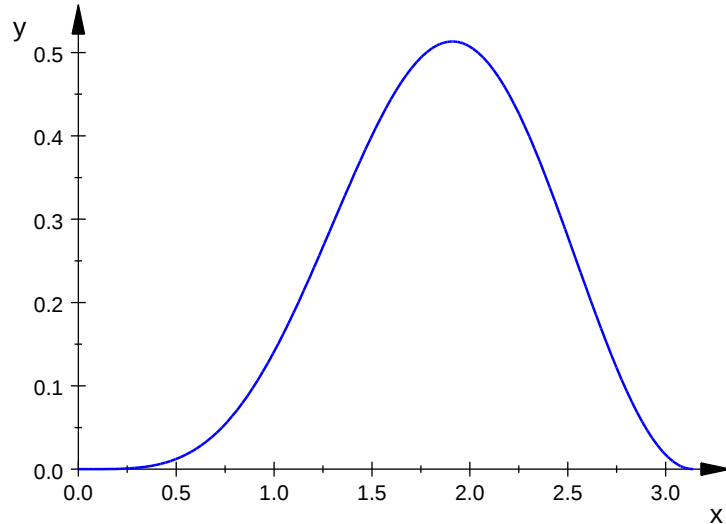
$$\cos \alpha = \frac{-1}{3} \text{ és un màxim relatiu estricte.}$$



$a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ , és a dir, és un tetraedre regular.

El volum màxim és:

$$V\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3.$$



Gràfica per a  $R = 1$ ,  $y = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \alpha \sqrt{2 - 2\cos \alpha - \sin^2 \alpha}$ .

b)

La suma de les arestes és:

$$f(a,b) = 3a + 3b.$$

$$f(\alpha) = 3(\sqrt{3}R \cdot \sin \alpha + R\sqrt{2 - 2\cos \alpha}), \alpha \in [0, \pi].$$

$$f'(\alpha) = 3R \left( \sqrt{3} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{2\sqrt{1 - \cos \alpha}} \right)$$

$$f'(\alpha) = 0.$$

$$\sqrt{3} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{2\sqrt{1 - \cos \alpha}} = 0.$$

$$3\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

$$3\cos^3 \alpha - 7\cos^2 \alpha + 1 = 0. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{3}, \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{La solució } \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ no és solució de } \sqrt{3} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{2\sqrt{1 - \cos \alpha}} = 0.$$

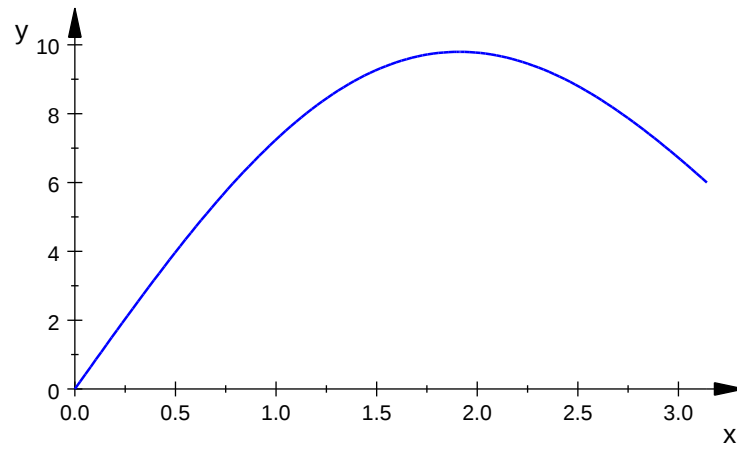
Estudiant el signe de la primera derivada:

$$\cos \alpha = \frac{-1}{3} \text{ és un màxim relatiu estricte.}$$

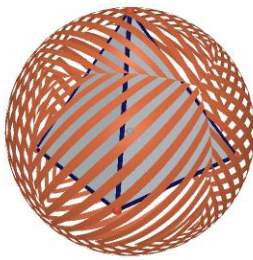
$$a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ és a dir, és un tetraedre regular.}$$

La suma màxima és:

$$f\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = 4\sqrt{6}R.$$



Gràfica per a  $R = 1$ ,  $y = 3(\sqrt{3} \sin x + \sqrt{2 - 2 \cos x})$ .



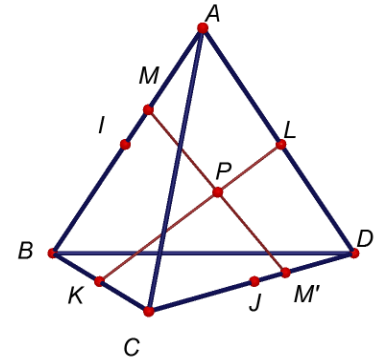
### Problema 26

Siga el tetraedre ABCD.

Siguen I, J, K, L els punts migs de les arestes  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AD}$ , respectivament.

a) Demostreu que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$ .

b) Demostreu que per a cada punt O del segment  $\overline{KL}$  existeixen els punts M i M' de les arestes  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  tal que P és el punt mig del segment  $\overline{MM'}$ .



Solució:

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KC} \quad (2)$$

Sumant ambdues expressions:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{DL}) + (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) + 2 \cdot \overrightarrow{LK} \quad (3)$$

Per ser L punt mig del segment  $\overline{AD}$ ,  $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{DL} = \vec{0}$ .

Per ser K punt mig del segment  $\overline{BC}$ ,  $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

Aleshores,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{LK}$ .

b)

Si P pertany al segment  $\overline{KL}$ , existeix  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\overrightarrow{KP} = \lambda \cdot \overrightarrow{KL}$ .

Siga M un punt de l'aresta  $\overline{AB}$ , existeix  $\alpha \in [0, 1]$  tal que  $\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{BA}$ .

Siga M' un punt de l'aresta  $\overline{CD}$ , existeix  $\beta \in [0, 1]$  tal que  $\overrightarrow{CM'} = \beta \cdot \overrightarrow{CD}$ .

Vegem que existeixen  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  tal que P és el punt mig del segment  $\overline{MM'}$ , és a dir,

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CM'} \quad (5)$$

Sumant ambdues expressions:

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2 \cdot \overrightarrow{PK} + (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM'} \quad (6)$$

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2 \cdot \overrightarrow{PK} + \vec{0} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM'} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2 \cdot \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM'} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = 2\lambda \cdot \overrightarrow{LK} + \alpha \cdot \overrightarrow{BA} + \beta \cdot \overrightarrow{CD} \quad (9)$$

Aplicant l'apartat a)

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = -\lambda \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \alpha \cdot \overrightarrow{BA} + \beta \cdot \overrightarrow{CD} \quad (10)$$

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = (\alpha - \lambda) \cdot \overrightarrow{BA} + (\beta - \lambda) \cdot \overrightarrow{CD} \quad (11)$$

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = \vec{0} \text{ si } (\alpha - \lambda) \cdot \overrightarrow{BA} + (\beta - \lambda) \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0}.$$

Els vectors  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  són linealment independents, aleshores:

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = \lambda \end{cases}.$$

Per tant si  $\begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = \lambda \end{cases}$ , P és el punt mig del segment  $\overline{MM'}$ .

### Problema 27

Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter  $\triangle ABC$ . La secció produïda en la piràmide ABCS per un plànel que passa pel vèrtex S i A, i pel punt mig M de l'aresta de la base BC és un triangle equilàter de costat 6cm. Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.

Solució:

$$\overline{AM} = \overline{AS} = \overline{MS} = 6.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMB$ :

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BS} = \overline{BC} = \overline{CS} = 4\sqrt{3}.$$

Siga O el punt mig del segment  $\overline{AM}$ .

$\overline{OS}$  és l'altura de la piràmide ABCS.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AOS$ :

$$\overline{OS} = 3\sqrt{3}.$$

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{3})^2 \cdot 3\sqrt{3} = 36\text{cm}^3.$$

Notem que el triangle  $\triangle BCS$  és equilàter de costat  $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$ .

Els triangles  $\triangle ABS$ ,  $\triangle ACS$  són iguals.

Siga N el punt mig de l'aresta  $\overline{AS}$ .

$$\overline{AN} = 3, \overline{AC} = 4\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ANC$ :

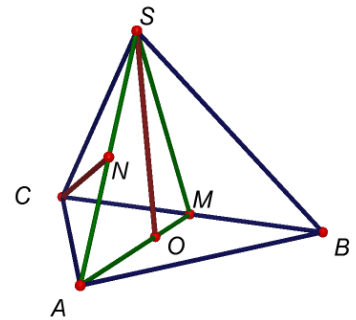
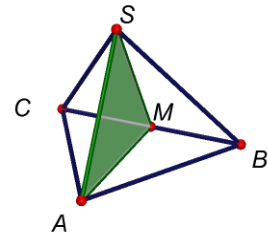
$$\overline{CN} = \sqrt{39}.$$

L'àrea del triangle isòsceles  $\triangle ACS$  és:

$$S_{ACS} = \frac{1}{2} 6\sqrt{39}$$

L'àrea de la piràmide ABCDS és:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} + 2 \cdot S_{ACS} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{3})^2 \right) + 6\sqrt{39} = 79.04\text{cm}^2.$$



### Problema 28

La suma de distàncies d'un punt interior d'un tetraedre regular a les cares és igual a l'altura del tetraedre.

Solució:

Siga el tetraedre regular ABCD.

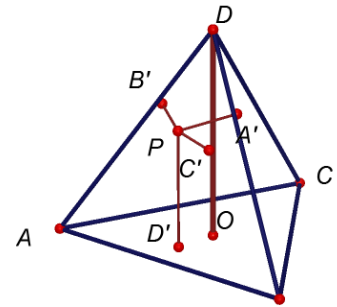
Siga P un punt interior al tetraedre.

Siga A' la projecció de P sobre la cara  $\triangle BCD$ .

Siga B' la projecció de P sobre la cara  $\triangle ACD$ .

Siga C' la projecció de P sobre la cara  $\triangle ABD$ .

Siga D' la projecció de P sobre la cara  $\triangle ABC$ .



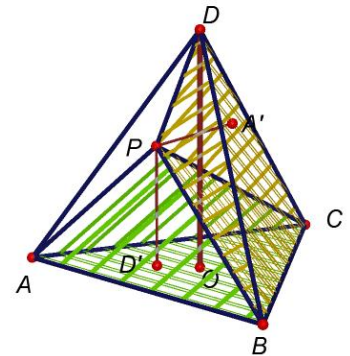
Siga O la projecció de D sobre la cara  $\triangle ABC$ .

L'altura del tetraedre ABCD és  $\overline{OD}$ .

El volum del tetraedre ABCD és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD}.$$

El volum del tetraedre ABCD és igual a la suma dels volums dels tetraedres ABPC, ABPD, ACDP i BCDP.



$$V_{ABCD} = V_{ABPC} + V_{ABPD} + V_{ACDP} + V_{BCDP}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{PA'} + \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot \overline{PB'} + \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot \overline{PC'} + \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot \overline{PD'}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} (\overline{PA'} + \overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PD'}).$$

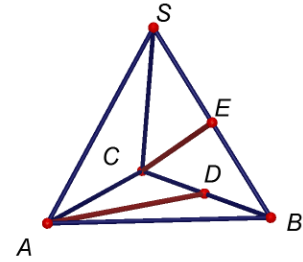
Aleshores:

$$\frac{1}{3} S_{ABC} (\overline{PA'} + \overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PD'}) = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD}.$$

$$\text{Per tant, } \overline{PA'} + \overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PD'} = \overline{OD}.$$

### Problema 29

En el tetraedre regular  $ABCS$ ,  $\overline{AD}$  és la mitjana del triangle  $\triangle ABC$ ,  $E$  és el punt mig de l'aresta  $\overline{BS}$ .  
Determineu l'angle que formen les rectes  $AD$ ,  $CE$ .  
*Gúsiev, problema 657.*



Solució:

Siga  $\overline{AB} = a$  aresta del tetraedre regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ADB$ :

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{CE} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Pel punt  $D$  tracem una recta paral·lela a la recta  $CE$  que talla l'aresta  $\overline{BS}$  en el punt  $F$ .

Els triangles  $\triangle BCE$ ,  $\triangle BDF$  són semblants i de raó 2:1.

$$\text{Aleshores, } \overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

L'angle que formen les rectes  $AD$  i  $CE$  és igual a l'angle  $\alpha = \angle ADF$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ABF$ :

$$\overline{AF}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a \frac{a}{4} \cos 60^\circ.$$

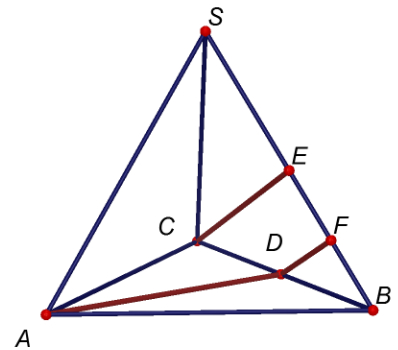
$$\overline{AF}^2 = \frac{13}{16}a^2.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ADF$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DF} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{13}{16} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2}a \frac{\sqrt{3}}{4}a \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{6}. \quad \alpha = \arccos \frac{1}{6} \approx 80^\circ 24' 21''.$$

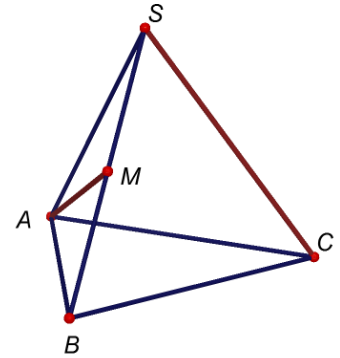


### Problema 30

En el tetraedre regular ABCS,  $\overline{AM}$  és la mitjana del triangle  $\triangle ABS$ .

Determineu l'angle que formen les rectes AM, CS.

Gúsiev, problema 662.



Solució:

Siga  $\overline{AB} = a$  aresta del tetraedre regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABM$ :

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Pel punt M tracem una recta paral·lela a la recta CS que talla l'aresta BC en el punt N.

Els triangles  $\triangle BCS$ ,  $\triangle BNM$  són semblants i de raó 2:1.

$$\text{Aleshores, } \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{CS} = \frac{1}{2} a.$$

L'angle que formen les rectes AM i CS és igual a l'angle  $\alpha = \angle AMN$ .

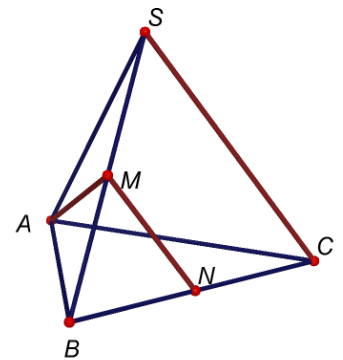
$$\overline{AN} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle AMN$ :

$$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MN} \cdot \cos \alpha.$$

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 + \left( \frac{1}{2} a \right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{1}{2} a \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^\circ 13' 17''.$$



### Problema 31

Siga ABCS un tetraedre regular.

Calculeu l'angle que formen l'aresta  $\overline{AB}$  i la cara  $\triangle ACS$ .  
Gúsiev, problema 637.

Solució:

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{CS}$ .

La projecció de aresta  $\overline{AB}$  sobre  $\triangle ACS$  pertany a la recta AM.  
L'angle que cerquem és  $\alpha = \angle MAB$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMC$ :

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

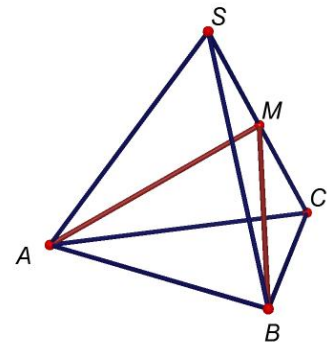
Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle AMB$ :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos \alpha.$$

Simplificant:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 44' 8''.$$



### Problema 32

En el tetraedre regular ABCS, per la mitjana  $\overline{AD}$  de la base  $\triangle ABC$  i K el punt mig de l'aresta  $\overline{SB}$ , s'ha dibuixat un plànel. Determineu l'angle d'aquest plànel i la base  $\triangle ABC$ .  
*Gúsiev problema 700.*

Solució:

Siga el tetraedre ABCS d'aresta  $\overline{AB} = a$ .

$$\overline{KD} = \frac{1}{2} \overline{CS} = \frac{1}{2} a.$$

Siga O la projecció de S sobre la base  $\triangle ABC$  (circumcentre del triangle).

$$\overline{OS} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AOS$ :

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{6}}{3} a.$$

Siga P la projecció de K sobre la base  $\triangle ABC$ .

$$\overline{PK} = \frac{1}{2} \overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6} a.$$

Siga M la projecció de K sobre  $\overline{AD}$ .

L'angle que forma el plànel ADK i la base  $\triangle ABC$  és  $\alpha = \angle KMP$ .

Siga  $x = \overline{AM}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles  $\triangle AMK$ ,  $\triangle DMK$ :

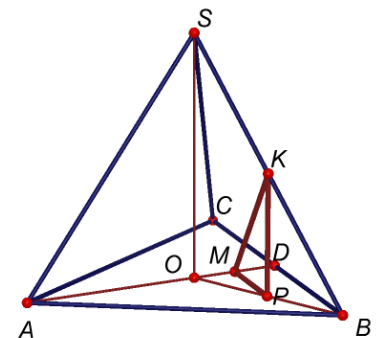
$$\overline{KM}^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 - x^2, \quad \overline{KM}^2 = \left( \frac{1}{2} a \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} a - x \right)^2.$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{12} a \\ \overline{KM} = \frac{\sqrt{33}}{12} a \end{cases}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle KMP$ :

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{33}}{12}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}. \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{22}}{11}\right) \approx 58^\circ 31' 4''.$$



### Problema 33

Siga D el punt mig de l'aresta  $\overline{AS}$  del tetraedre regular ABCS.

Siga E el punt mig de l'altura  $\overline{OS}$ .

Determineu l'angle de les rectes CE i DO.

*Gúsiev, problema 654.*

Solució:

Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta  $\overline{AB} = a$ .

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{BC}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle BMA$ :

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

O és el baricentre de la base. Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3} a. \quad \overline{OM} = \frac{1}{3} \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AOS$ :

$$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3} a.$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} \overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6} a$$

Siga P la projecció de D sobre la base.

$$\overline{AP} = \overline{OP} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

Els triangles  $\triangle OPD$ ,  $\triangle MOE$ . A més a més  $\overline{PD}$ ,  $\overline{OE}$  són paral·lels.

Aleshores,  $\overline{OD}$  i  $\overline{ME}$  són paral·lels.

L'angle que formen les rectes CE i DO és  $\alpha = \angle MEC$ .

$$\angle EMC = 90^\circ.$$

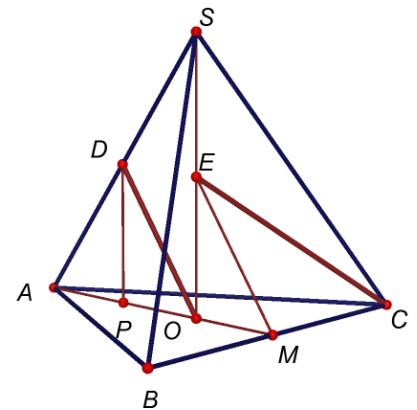
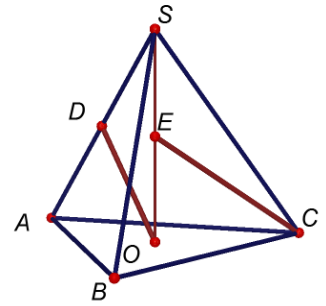
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MOE$ :

$$\overline{EM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a\right)^2} = \frac{1}{2} a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle MEC$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{EM}} = \frac{\frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} a} = 1.$$

$$\alpha = 45^\circ.$$



### Problema 34

Siga ABCD un tetraedre regular.

Siga M el punt mig de l'aresta  $\overline{BS}$ .

Calculeu l'angle de la mitjana  $\overline{AM}$  i l'aresta  $\overline{CS}$ .

*Gúsiev, problema 662.*

Solució:

Sig el tetraedre regular ABCS d'aresta  $\overline{AB} = a$ .

Pel vèrtex S tracem una paral·lela a la mitjana  $\overline{AM}$  que talla la recta AB en el punt P.

$$\angle SPB = 30^\circ, \angle PSB = 90^\circ.$$

$$\overline{PB} = 2\overline{BS} = 2a, \overline{PS} = a\sqrt{3}$$

Siga N el punt mig de l'aresta  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle  $\triangle AMB$ :

$$\overline{AM} = \overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{PN} = \frac{3}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle  $\triangle PNC$ :

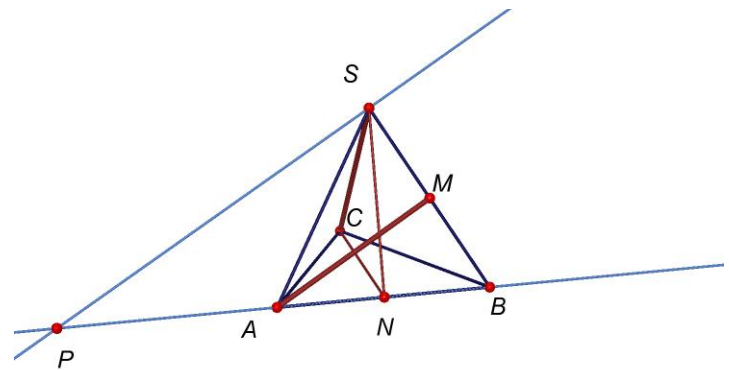
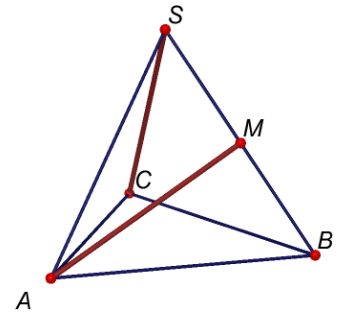
$$\overline{PC} = a\sqrt{3}.$$

L'angle que formen les rectes AM, CS és  $\alpha = \angle PSC$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle PSC$ :

$$(a\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}a \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^\circ 13' 17''.$$

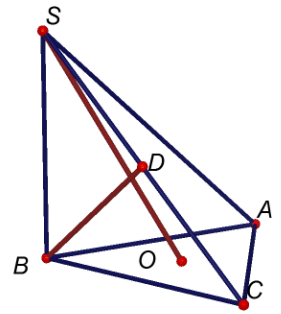


### Problema 35

En la piràmide triangular  $\triangle ABCS$  la base  $\triangle ABC$  és un triangle equilàter i les cares  $\triangle SAB$  i  $\triangle SBC$  són perpendiculars a la base.

Siga l'aresta  $\overline{SB}$  igual a l'aresta  $\overline{AB}$ .

Siga  $O$  el baricentre de la base  $\triangle ABC$ . Siga  $D$  el punt mig de l'aresta  $\overline{SC}$ .  
Calculeu l'angle que formen les rectes  $BD$  i  $SO$ .  
*Gúsiev, problema 671.*



Solució 1:

Siga l'aresta  $\overline{AB} = a$ . L'aresta  $\overline{SB}$  és perpendicular a la base.

Siga  $\alpha$  l'angle que formen els vectors  $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$ .

$$\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BOS$ :  $\overline{OS} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BCS$ :  $\overline{SC} = a\sqrt{2}$ .  $\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ .

Aplicant el producte escalar als vectors  $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$ :

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{OS}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| \cdot \cos \alpha.$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}).$$

Per la propietat del baricentre:  $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ .

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BO}.$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2.$$

Per ser ortogonals,  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$ .

Aplicant el producte escalar als vectors  $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$ :

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \left( \overrightarrow{BS} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \right) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}).$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BS}\|^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} - \frac{1}{3} \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS} \right).$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \left( a^2 - \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{3} a^2 \right) = \frac{1}{4} a^2 \quad (2)$$

Igualant les dues expressions del producte escalar:

$$\frac{\sqrt{6}}{3} a^2 \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} a^2. \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{8}. \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right) \approx 72^\circ 10' 14''.$$

Solució 2:

Siga l'aresta  $\overline{AB} = a$ . L'aresta  $\overline{SB}$  és perpendicular a la base.  
Siga la recta  $m$  paral·lela a la recta  $BD$  que passa pel vèrtex  $S$ .  
Siga la recta  $n$  paral·lela a l'aresta  $\overline{BS}$  que passa per  $D$ .  
Les rectes  $m$ ,  $n$  s'intersequen en el punt  $K$  que pertany al pla  $BCS$ .

La recta  $n$  talla l'aresta  $\overline{BC}$  en el punt mig  $N$  de la mateixa.  
L'angle que formen les rectes  $OS$  i  $BD$  és l'angle  $\beta = \angle KSO$ .

$$\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BOS$ :

$$\overline{OS} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BCS$ :

$$\overline{SC} = a\sqrt{2}. \quad \overline{BD} = \overline{SK} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

$$\overline{KN} = \overline{KD} + \overline{DN} = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

$$\overline{ON} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

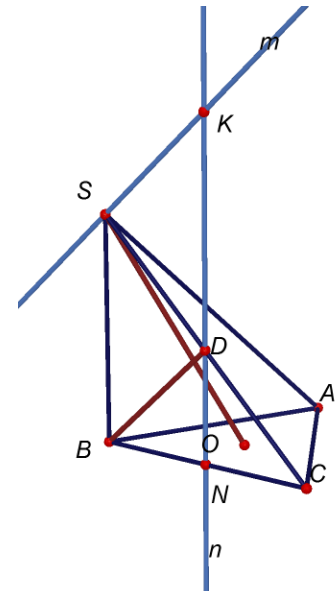
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ONK$ :

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{21}}{3} a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle KSO$ :

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{3} a\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 - 2 \frac{2\sqrt{3}}{3} a \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos \beta.$$

$$\cos \beta = \frac{-\sqrt{6}}{8}, \quad \beta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}\right) \approx 107^\circ 49' 46''.$$



Bibliografia:

GÚSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría*. Editorial Mir. Moscou, 1989.

KLETENIK, D. *Problemas de geometría analítica*. Moscou. 1979.

POGORÉLOV A.V. *Geometría elemental*. Ed. Mir. Moscou. 1974.

GUILLÉN SOLER, G. *Poliedros*. Ed. Ed. Síntesis. Col. Educación matemática en secundaria, 15. Madrid. 1997.

MEDVIÉDEV G.N. *Problemas de matemática. Olimpiadas y exámenes de admisión*. Ed. URSS. Moscou 2010.

SORTAIS, Y., SORTAIS R. *Géométrie de l'espace et du plane*. Ed. Hermann. Paris. 1988.

Pàgines Web:



<http://www.komal.hu/info/bemutakozas.e.shtml>

Revista KöMaL. Societat Hongaresa de Física i Matemàtiques.  
Problemes olímpics de tots els nivells.  
Publiquen 8 números a l'any.  
Idioma: Anglès i magiar.



<http://www.obm.org.br/opencms/>

Pàgina de l'Olimpíada brasileira de matemàtica.  
Informació sobre les proves.  
Revista de problemes EUREKA. Dos nivells de problemes.  
Idioma: Portugués.