REFINAMIENTO DE UN PROBLEMA DE OLIMPIADA MATEMÁTICA

VICENTE VICARIO GARCÍA

Dedicado a D. Francisco Bellot Rosado

ÍNDICE

Resumen ………………………………………………………………… **3**

Introducción ……………………………………………………………. **3**

Planteamiento del problema ………………………………………. **3**

Algunos refinamientos de las desigualdades de Weitzenböck y de Finsler-Hadwiger ……………………………………………………… **5**

Refinamientos de la desigualdad. Algunos teoremas …………. **8**

Conclusiones ……………………………………………………………… **10**

Resumen

Este artículo tiene su génesis en la lectura atenta de la resolución del problema 81 del libro "*Cien Problemas de Matemáticas*" *Combinatoria. Álgebra. Geometría*, cuyos autores son D. Francisco Bellot Rosado y Dª. Mª. Ascensión López Chamorro. (Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Valladolid). El libro básicamente está dedicado a exponer resoluciones concisas, y muchas de ellas brillantes, de problemas de olimpiadas matemáticas. El problema a tratar consistía en demostrar una desigualdad relacionada con la geometría del triángulo que se ha hecho clásica. El objetivo de este artículo es explicar la desigualdad y mejorarla desde varias desigualdades.

Introducción

Comenzaremos por exponer detalladamente el contenido del problema ya citado y la resolución que aparece en el libro de Bellot. Además el autor de este artículo propone otra demostración alternativa como corolario de la famosa desigualdad de Erdös-Mordell. Posteriormente, comentaremos algunos refinamientos importantes de las desigualdades de Weitzenböck y Finsler-Hadwiger que nos ayudarán a refinar la demostración clásica y obtener teoremas mejorados respecto del original. Finalmente, comentaremos algunos puntos de vista sobre el problema fundamental y algunos problemas abiertos que pueden ser estudiados.

A lo largo de este artículo usaremos la notación habitual en la geometría del triángulo.

Planteamiento del problema

Problema 81.-(Libro de Bellot) "*Sea ABC un triángulo y P un punto interior. Probar que al menos uno de los ángulos* $< PAB, < PBC, < PCA$ *es menor o igual que 30º* ".

(IMO. 1991; propuesto por Francia).

1ª Demostración: (del Prof. Omid Alí Kharamzadeh, de Irán).

Razonaremos por reducción al absurdo. Sean $\alpha =< PAB,\ \beta =< PBC, \gamma =< PCA,\ x = PA, y = PB, z = PC$, y supongamos que los ángulos α, β, γ son mayores que 30º. Entonces si Δ es el área del triángulo *ABC*, tenemos

$$\Delta = \frac{1}{2} cx sen\alpha + \frac{1}{2} ay sen\beta + \frac{1}{2} bz sen\gamma > \frac{1}{4}(cx + ay + bz)$$

ya que $sen\alpha, sen\beta, sen\gamma$ son mayores que $^1/_2$. La posibilidad de que alguno de los ángulos α, β, γ sea mayor que 150º se descarta, ya que entonces el teorema se verificaría trivialmente.

Por otra parte, por la desigualdad de Weitzenböck $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta$, tenemos que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}.(cx + ay + bz) \qquad [1]$$

Pero, por el teorema del coseno aplicado a los triángulos *PAB*, *PBC* y *PCA*, tenemos

$$x^2 = b^2 + z^2 - 2bzcos\gamma > b^2 + z^2 - \sqrt{3}.bz \qquad \left(cos\gamma < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y^2 = c^2 + x^2 - 2cxcos\alpha > c^2 + x^2 - \sqrt{3}.cx \qquad \left(cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z^2 = a^2 + y^2 - 2aycos\beta > a^2 + y^2 - \sqrt{3}.ay \qquad \left(cos\beta < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

y, sumando miembro a miembro, obtenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 < \sqrt{3}.(cx + ay + bz)$$

que contradice [1]. Esta contradicción demuestra el teorema.

Nota: Existen muchas demostraciones de la famosa desigualdad de Weitzenböck (1919). La propuesta en el libro es la siguiente:

Del teorema del coseno aplicado en el triángulo *ABC* tenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2) - 2bccosA$$

y como $\Delta = \frac{1}{2}bcsenA$, entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2) - 4bc\left(\frac{1}{2}cosA + \frac{\sqrt{3}}{2}senA\right)$$
$$= 2(b^2 + c^2) - 4bccos\left(\frac{\pi}{3} - A\right) \geq 2(b^2 + c^2) - 4bc = 2(b - c)^2 \geq 0$$

2ª Demostración: Esta demostración surge como una simple aplicación o corolario del famoso teorema de Erdös-Mordell que afirma que si P es un punto interior a un triángulo *ABC*, d_a, d_b, d_c son las distancias de este punto a los lados *BC*, *AC*, *AB* del triángulo, respectivamente; x, y, z son las respectivas distancias de dicho punto a los vértices *A*, *B*, *C*, se cumple que

$$PA + PB + PC = x + y + z \geq 2.(\, d_a, + d_b + \, d_c)$$

Para varias demostraciones alternativas de esta desigualdad se puede ver mi artículo Extra 500 para esta revista *Reflexiones sobre la desigual de Erdös-Mordell* y algunos refinamientos de esta desigualdad como el famoso teorema de Barrow.

Con la misma notación presentada en la demostración anterior, razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que, contrariamente a la tesis del teorema, los ángulos $\alpha =< PAB,\ \beta =< PBC, \gamma =< PCA$ son todos mayores que 30º. Entonces claramente tenemos que

$$sen\alpha = \frac{d_c}{x} > \frac{1}{2}$$

$$sen\beta = \frac{d_a}{y} > \frac{1}{2}$$

$$sen\gamma = \frac{d_b}{z} > \frac{1}{2}$$

y sumando miembro a miembro llegamos a $2(d_a + d_b + d_c) > x + y + z$ que contradice al teorema de Erdös-Mordell. Esta contradicción demuestra el teorema.

Algunos refinamientos de las desigualdades de Weitzenböck y de Finsler-Hadwiger

En este apartado indicaremos algunos refinamientos clásicos a las desigualdades de Weitzenböck y Finsler-Hadwiger, para después aplicarlos adecuadamente en los teoremas finales.

Es bien conocida la siguiente cadena de desigualdades que se cumplen para los elementos de cualquier triángulo

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 18Rr$$
$$\geq 4\sqrt{3}.\Delta$$

que demuestra, obviamente, que la desigualdad de Weitzenböck dista mucho de ser precisa. Damos también otra mejora a esta desigualdad que apareció como problema 2732 en la revista Crux Mathematicorum y que mantiene su propia estructura.

Problema 2732 de Crux Mathematicorum

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.max\left\{\frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c}\right\}$$

La demostración es tan sencilla y elegante que no nos resistimos a escribirla Es bien sabido que $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ y por tanto tenemos $4m_a^2 + 3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$, y en consecuencia, a partir de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4m_a^2 + 3a^2}{2} \geq 2\sqrt{3}.m_a a = 2\sqrt{3}.m_a a.\frac{h_a}{h_a} = 4\sqrt{3}.\frac{m_a}{h_a}$$

lo que demuestra la desigualdad.

Claramente, esta última desigualdad es también ampliamente mejorable. Para ello pasamos a los refinamientos de la desigualdad de Finsler-Hadwiger. Todos ellos aparecen en mi artículo del Extra 500 de esta revista: *Refinamientos de la desigualdad de Finsler-Hadwiger*. Recordamos los más interesantes, y previamente indicamos la desigualdad de Finsler-Hadwiger que por brevedad denotaremos por FH

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \qquad \text{FH}$$

que es equivalente a la desigualdad $\sqrt{3}.s \leq 4R + r$,

Indicamos ahora dos refinamientos de C. Lupu y C. Pohoata a la desigualdad FH que aparecen en el mencionado artículo

Refinamiento1:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3}.\Delta + 2r(4R+r) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Refinamiento 2:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3 + \frac{4(R-2r)}{4R+r}}.\Delta + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Por otra parte, utilizando la clásica transformación $T: a \to \sqrt{a(s-a)}$ obtenemos otro triángulo con $\Delta \to \frac{\Delta}{2}$ a partir del original. Aplicando sucesivamente esta transformación obenemos una infinidad de desigualdades que mejoran sucesivamente la anterior y además manteniendo la estructura. Indicamos los refinamientos sucesivos a la desigualdad FH que se obtienen por este procedimiento:

FH0 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta$ Weitzenböck (1919)

FH1 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta + \sum_{cíclica}(b-c)^2$ Finsler-Hadwiger (1937)

FH2 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta + \sum_{cíclica}(b-c)^2 + 2\sum_{cíclica}\left(\sqrt{b(s-b)} - \sqrt{c(s-c)}\right)^2$

FH3 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta + \sum_{cíclica}(b-c)^2 + 2\sum_{cíclica}\left(\sqrt{b(s-b)} - \sqrt{c(s-c)}\right)^2 + 4\sum_{cíclica}(\dots)^2$

Vemos entonces que la desigualdad de Weitzenböck (FH0) es refinada por la desigualdad de Finsler-Hadwiger (FH1), que a su vez es refinada por una secuencia de desigualdades FH2, FH3, …

En sentido inverso, es importante hacer notar que la constante $4\sqrt{3}.\Delta$ que aparece en los refinamientos anteriores de la desigualdad FH no se puede reemplazar por $18Rr$, aunque aparezca en la última desigualdad de la cadena de desigualdades

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 18Rr \geq 4\sqrt{3}.\Delta$$

ya que podríamos pensar que la desigualdad

$$a^2+b^2+c^2 \geq 18Rr+\sum_{cíclica}(b-c)^2$$

sea cierta, pero desgraciadamente es cierta la desigualdad opuesta

$$a^2+b^2+c^2 \leq 18Rr+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

que es equivalente a

$$2(ab+bc+ca)-(\,a^2+b^2+c^2) \leq 18Rr=\frac{9abc}{a+b+c}$$

y esta última desigualdad es clásica y sabemos que es cierta.

Antes de pasar a los refinamientos del problema del libro de Bellot ya comentado inicialmente, creemos importante hacer notar la siguiente demostración elemental de la desigualdad de Weitzenböck que sorprende por su sencillez. La petición de demostración a esta desigualdad apareció como problema de olimpiada matemática en 1961.

(IMO 1961) Olimpiada matemática Internacional

"*Sean a, b, c* los lados de un triángulo y Δ su área. Probar que $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}.\Delta$ "

Demostracióp n: Se puede demostrar esta desigualdad a partir de una identidad elemental. Sea el triángulo *ABC*. Consideremos, sin pérdida de generalidad, $a \geq b \geq c$.. Si el triángulo fuese equilátero, entonces su altura sobre el lado *BC* sería trivialmente $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ y su área $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ y por tanto, se cumpliría la igualdad. Para un triángulo cualquiera podemos definir el punto *P* como el pie de la altura trazada desde el vértice *A* sobre el lado mayor *BC*. Sean además $x=\frac{a}{2}-BP$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}a-h_a$. La idea para introducir *x* e *y* es que estas cantidades representan la desviación del triángulo respecto de uno equilátero. Entonces, en virtud del teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos *ABP* y *APC*, tenemos que

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}.\Delta = a^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+2h_a^2-2ah_a\sqrt{3}$$

$$=\frac{3}{2}a^2+2x^2+2h_a\left(h_a-a\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}a^2+2x^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-y\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-y\right)$$

$$=\frac{3}{2}a^2+2x^2-\frac{3}{2}a^2+2y^2=2(x^2+y^2) \geq 0$$

y la identidad muestra la desigualdad y además indica que la igualdad se da si y sólo si el triángulo es equilátero.

Finalmente, pasamos a proporcionar cinco teoremas que mejoran la propuesta del problema de olimpiada ya mencionado. Cada uno de ellos utiliza refinamientos de las desigualdades de Weitzenböck o de Finsler-Hadwiger. Las demostraciones de todos ellos son análogas, por reducción al absurdo, y la contradicción a la que se llega contradice cada uno de estos refinamientos. Por ello indicamos detalladamente sólo la demostración del primer teorema ya que consideramos monótono y pesado escribir todas las demostraciones de los demás teoremas que básicamente tienen la misma estructura.

Refinamientos de la desigualdad. Algunos teoremas.

A lo largo del contenido y demostración del teorema que sigue, emplearemos la notación habitual en la geometría del triángulo. P será un punto interior al mismo, $x = PA, y = PB, z = PC, \alpha =< PAB,\ \beta =< PBC, \gamma =< PCA$.

Teorema 1: ***Sea un triángulo arbitrario ABC y P un punto interior al mismo. Entonces, al menos uno de los ángulos*** $\boldsymbol{\alpha} =< PAB,\ \beta =< PBC, \gamma =< PCA$ **es menor o igual que el ángulo**

$$\boldsymbol{\delta = arcot\left[\sqrt{3} + \frac{Q}{4\Delta}\right]}$$

donde $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{2}} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^{\boldsymbol{2}} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{2}}$

Demostración: Razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que los ángulos $\alpha =< PAB,\ \beta =< PBC, \gamma =< PCA$ son mayores que el ángulo $\delta = arcot\left[\sqrt{3} + \frac{Q}{4\Delta}\right]$. Si Δ es el área del triángulo *ABC* es claro que

$$\Delta = \frac{1}{2}(cxsen\alpha + aysen\beta + bzsen\gamma) > \frac{1}{2}sen\delta(cx + ay + bz)$$

ya que $sen\alpha, sen\beta, sen\gamma$ son mayores que $sen\delta$. La posibilidad de que uno de los ángulos α, β, γ sea mayor que $\pi - \delta$ es descartada, puesto que entonces el teorema se verifica trivialmente ya que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, y en consecuencia, si uno de los ángulos α, β, γ digamos γ, fuese mayor que $\pi - \delta$, entonces se tendría $\alpha + \beta + \pi - \delta < \pi$, y o bien α, o bien β, cumplirían claramente la tesis del teorema.

Aplicando ahora el teorema de los cosenos a los triángulos *APB, BPC* y *CPA*

$$x^2 = b^2 + z^2 - 2bzcos\gamma > b^2 + z^2 - 2bzcos\delta$$

$$y^2 = c^2 + x^2 - 2cxcos\alpha > c^2 + x^2 - 2cxcos\delta$$

$$z^2 = a^2 + y^2 - 2aycos\beta > a^2 + y^2 - 2aycos\delta$$

y sumando miembro a miembro tenemos

$$a^2+b^2+c^2<2cos\delta(cx+ay+bz)<2cos\delta.\frac{2\Delta}{sen\delta}=4\Delta cot\delta$$

y, en consecuencia

$$a^2+b^2+c^2<4\Delta\left[\sqrt{3}+\frac{Q}{4\Delta}\right]=4\sqrt{3}.\Delta+Q$$
$$=4\sqrt{3}.\Delta+\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

que contradice la desigualdad de Finsler-Hadwiger para el triángulo

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}.\Delta+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Esta contradicción demuestra el teorema.

Pasamos ahora a la secuencia de los demás teoremas que también refinan el problema original de los que, como ya comentamos, no proporcionamos la demostración por ser básicamente la misma que la anterior y en las que se contradice algunos de los refinamientos ya comentados de la desigualdad FH.

Teorema 2: ***Sea un triángulo arbitrario ABC y P un punto interior al mismo. Entonces, al menos uno de los ángulos*** $\boldsymbol{\alpha}=<PAB,\ \beta=<PBC,\gamma=<PCA$ **es menor o igual que el ángulo**

$$\boldsymbol{\delta=arcot\left[\sqrt{3+\frac{4(R-2r)}{4R+r}}+\frac{Q}{4\Delta}\right]}$$

donde $\boldsymbol{Q=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$

Teorema 3: ***Sea un triángulo arbitrario ABC y P un punto interior al mismo. Entonces, al menos uno de los ángulos*** $\boldsymbol{\alpha}=<PAB,\ \beta=<PBC,\gamma=<PCA$ **es menor o igual que el ángulo**

$$\boldsymbol{\delta=arcot\left[\sqrt{3}.max\left\{\frac{m_a}{h_a},\frac{m_b}{h_b},\frac{m_c}{h_c}\right\}\right]}$$

donde $\boldsymbol{Q=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$

Teorema 4: ***Sea un triángulo arbitrario ABC y P un punto interior al mismo. Entonces, al menos uno de los ángulos*** $\boldsymbol{\alpha}=<PAB,\ \beta=<PBC,\gamma=<PCA$ **es menor o igual que el ángulo**

$$\boldsymbol{\delta=arcot\left[\sqrt{3}+\frac{Q+R}{4\Delta}\right]}$$

donde $\boldsymbol{Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$ ***y*** $\boldsymbol{R = 2\sum_{cíclica}\left(\sqrt{b(s-b)} - \sqrt{c(s-c)}\right)^2}$.

Para el último teorema tenemos en cuenta una conocida igualdad que proporciona el cuadrado de la distancia entre el baricentro y el punto de Fermat de un triángulo en función de las longitudes de sus lados y su área, que sorprendentemente demuestra una íntima conexión con la desigualdad de Weitzenböck

$$FG^2 = \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}.\Delta\right)$$

Teorema 5: ***Sea un triángulo arbitrario ABC y P un punto interior al mismo. Entonces, al menos uno de los ángulos*** $\boldsymbol{\alpha} =< PAB,\ \beta =< PBC, \gamma =< PCA$ **es menor o igual que el ángulo**

$$\boldsymbol{\delta = arcot\left[\sqrt{3} + \frac{9FG^2}{2\Delta}\right]}$$

Conclusiones

Hemos utilizado refinamientos de las desigualdades Weitzenböck y Finsler-Hadwiger para refinar a su vez los ángulos de los últimos teoremas que mejoran el contenido del problema clásico que aparece en el libro de Bellot. El autor de este artículo propone que se busquen refinamientos de estas desigualdades como consecuencias del teorema de Erdös-Mordell o refinamientos del mismo, como el ya mencionado teorema de Barrow, u otras desigualdades de refinamiento de este famoso teorema que aparecen como conjeturas que esperan ser demostradas.

---oooOooo---