

■ Enunciado

Sea O el circuncentro de un triángulo ABC, con $AC = BC$. La recta AO corta a BC en D.

Si BD y CD son enteros y AO-CD es un número primo, determinar esos tres números.

■ Solución

Del enunciado deducimos que han de ser enteros AC, BC, BD, CD y AO.

En principio me ocuparé de triángulos para los cuales las anteriores medidas sean racionales.

Tomamos $A=(-k,0)$, $B=(k,0)$ y $C=(0,c)$. Así $AC = BC = \sqrt{k^2 + c^2}$ y la circunferencia circunscrita tiene centro $(0, \frac{(c-k)(c+k)}{2c})$ y radio $AO = \frac{c^2+k^2}{2c}$ lo que implica la racionalidad de c al ser AO y AC enteros pero no la de k (1). Además $CD = \frac{(c^2+k^2)^{3/2}}{-3c^2+k^2}$.

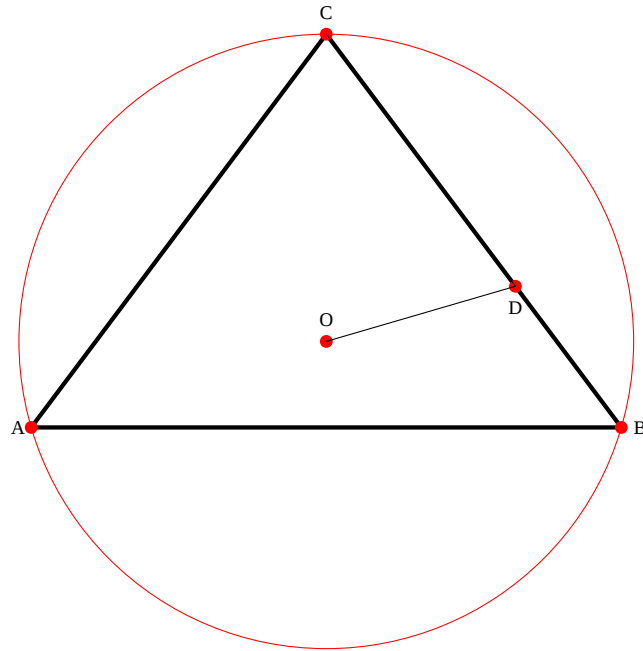
Busquemos las soluciones enteras para $k^2 + c^2 = t^2$ (2). Se trata de encontrar ternas pitagóricas que se generan a partir de las fórmulas $t = u^2 + v^2$, $k = 2uv$ y $c = u^2 - v^2$ (3), con u, v enteros.

Ahora las anteriores medidas quedan $AC = BC = u^2 + v^2$, $AO = \frac{(u^2+v^2)^2}{4uv}$, $CD = -\frac{(u^2+v^2)^3}{u^4-14u^2v^2+v^4}$, $AO-CD = \frac{(u^2+v^2)^2}{4uv} + \frac{(u^2+v^2)^3}{u^4-14u^2v^2+v^4}$.

Estos números son en general racionales. Se convierten en enteros si aplicamos al triángulo ABC una homotecia de centro (0,0) y de razón $h = \left| \frac{4uv(u^4-14u^2v^2+v^4)}{u^2+v^2} \right|$ (4).

Pasamos a la exigencia de que AO-CD sea primo. Tras los anteriores cálculos, este número es $(u^2 + v^2)(u^4 + 4u^3v - 14u^2v^2 + 4uv^3 + v^4)$ que será primo si lo es el primer factor y el segundo vale 1 lo que "solo" sucede si $u = 2$ y $v = 1$ (5).

Para $k = \frac{936}{5}$ y $c = \frac{1248}{5}$ tenemos el triángulo buscado. Las medidas son $AC = BC = 312$, $OA = 195$, $CD = 200$ y $AO-CD = -5$.



■ Notas

- (1) Ciertamente si $k = \frac{40\sqrt{11}}{3}$ y $c = \frac{200}{3}$ las medidas del problema son $AC=80$, $OA=48$, $CD=45$ y $OA-CD=3$ primo. Esta es la solución de Fabiola Czwieniczek.
- (2) Pueden ser racionales, pero de las soluciones enteras se derivan las racionales y viceversa.
- (3) t es la medida de AC , hipotenusa. Los valores de c y k pueden intercambiarse. De hecho $u'=u+v$ y $v'=u-v$ intercambia c y k con sus valores duplicados.
- (4) El signo puede variar, lo que invertiría el triángulo. De ahí el valor absoluto.
- (5) Lo supongo pero ignora la demostración de que las únicas soluciones enteras de $u^4 + 4u^3v - 14u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 = 1$, o equivalentemente $(u+v)^4 - 20u^2v^2 = 1$ solo tiene como soluciones enteras $u=2$ y $v=1$, y sus derivadas cambiando posición o signo. La anterior ecuación se puede transformar en la ecuación de Pell $x^2 - 20y^2 = 1$, haciendo $(u+v)^2 = x$, $y=uv$, que tiene ∞ soluciones ($x=9$, $y=2$ es una) pero a saber si proporcionan valores enteros de u y v .