

Quincena del 1 al 15 de Septiembre de 2013

Problema 688

10. Sea O el circuncentro de un triángulo ABC, con $AC = BC$.

La recta AO corta el lado BC en D.

Si BD y CD son enteros y $AO - CD$ es un número primo, determina esos tres números.

Concursos Nacionales de Cuba 2000-2013(Actualizado el 7 de Septiembre)

Solución de Fabiola Czwieniczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Tenemos un triángulo isósceles ABC con $AC = CB$. La recta que pasa por el vértice A y el circuncentro O corta al lado BC en el punto D. Se sabe que BD y CD son números enteros. Como $BD + CD = CB$, se tiene que CB es entero (al igual que AC). También sabemos que $AO - CD$ es primo. Esto es, $AO - CD$ es entero, al igual que CD. Por tanto, AO es entero. Adoptemos la notación usual para el circunradio AO y denotémoslo por R. Así, $AO = R$ es un número entero. En resumen, de los datos dados hemos deducido que las medidas de los lados congruentes del triángulo ABC son enteros y su circunradio también es entero.

Por otra parte, se afirma que el triángulo ABC es acutángulo. En efecto, supongamos que ABC es un triángulo obtusángulo. Entonces su circuncentro O es un punto exterior del triángulo y la recta OA no corta al lado CB (figura 1), lo cual contradice uno de los datos dados. Ahora, supongamos que ABC es un triángulo rectángulo. En este caso el circuncentro O es el punto medio de la hipotenusa (figura 2) y, en consecuencia, la medida del circunradio es $R = \frac{\sqrt{2}}{2} CB$. Como CB es entero, R es irracional. Esto contradice el hecho de que R es entero.

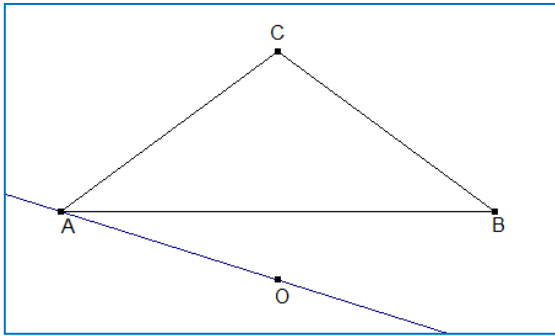


Figura 1

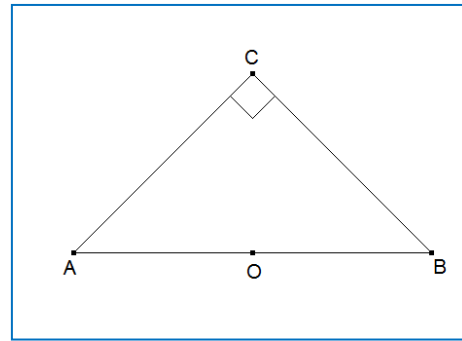


Figura 2

En el triángulo ABC dado, tracemos la altura correspondiente a la base AB. Sea M el pie de esta altura. Por ser ABC isósceles, con $AC = CB$, el segmento CM está en la mediatriz de AB y en la bisectriz del $\angle ACB$. Por tanto, el circuncentro O está en el segmento CM. Denotemos por α a la medida, en grados, del $\angle ACM$. Con esta información es fácil completar las medidas de otros ángulos, tal y como se muestra en la figura 3.

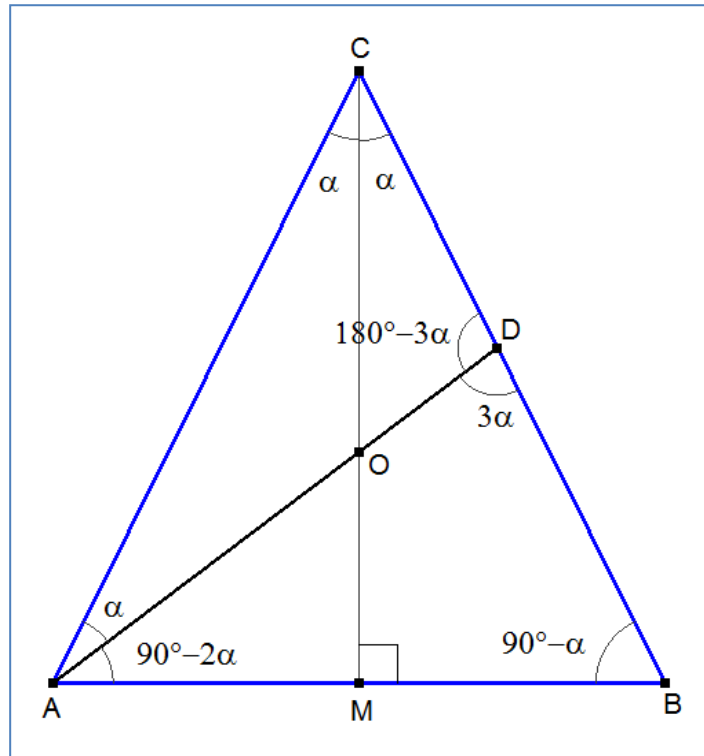


Figura 3

Aplicando ley del seno en el triángulo ADC, tenemos que:

$$\frac{AD}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{CD}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{AC}{\operatorname{sen} (180^\circ - 3\alpha)} \quad (1)$$

Aplicando ley del seno en el triángulo ADB, tenemos que:

$$\frac{AD}{\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\operatorname{sen} (90^\circ - 2\alpha)} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 3\alpha} \quad (2)$$

Al simplificar (2), obtenemos:
$$\frac{AD}{\cos \alpha} = \frac{BD}{\cos 2\alpha} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 3\alpha} \quad (3)$$

De (1): $AD = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} CD \Rightarrow AD = 2 \cos \alpha CD \quad (4)$

De (3): $AD = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} BD \quad (5)$

De (5) y (4): $\frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} BD = 2 \cos \alpha CD \Rightarrow \mathbf{BD = 2 CD \cos 2\alpha} \quad (6)$

Nótese que $BC = CD + BD$. Así, $BC = CD + 2 \cos 2\alpha CD \Rightarrow \mathbf{BC = CD (1 + 2 \cos 2\alpha)} \quad (8)$

Por otra parte, sabemos que $\operatorname{sen} \angle A = \frac{BC}{2R}$. Esto es, $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{2R} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{BC}{2R} \quad (9)$

De (9) y (8): $R = \frac{BC}{2 \cos \alpha} = \frac{CD (1 + 2 \cos 2\alpha)}{2 \cos \alpha} \quad (10)$

De las igualdades (6) y (9) obtenemos datos importantes:

- por ser BD y CD enteros positivos, $\cos 2\alpha$ es racional y positivo
- por ser BC y R números enteros positivos, $\cos \alpha$ es racional y positivo.

En consecuencia, existen dos enteros m y n, primos relativos, tales que

$$\cos \alpha = \frac{m}{n} \quad (11)$$

Como $0 < \cos \alpha < 1$, debe ser $0 < m < n$ y $n \neq 1$.

Calculemos $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \frac{m^2}{n^2} - 1 \Rightarrow \mathbf{\cos 2\alpha = \frac{2m^2 - n^2}{n^2}} \quad (12)$$

Puesto que $0 < \cos 2\alpha$, debe ser $n \neq 2$. En efecto, si $n = 2$, entonces $m = 1$. En consecuencia, $\cos 2\alpha = \frac{2m^2 - n^2}{n^2} = \frac{-1}{2} < 0$.

Conocidas las expresiones de $\cos \alpha$ y $\cos 2\alpha$, continuemos.

$$\text{Sustituyamos (12) en (6): } BD = 2 CD \frac{2m^2 - n^2}{n^2} = \frac{4 CD m^2 - 2 CD n^2}{n^2} = \frac{4 CD m^2}{n^2} - 2 CD \quad (13)$$

Observemos la igualdad (13): por ser BD y CD enteros, se deduce que $\frac{4 CD m^2}{n^2}$ es también entero. Como m y n son primos relativos, tenemos que n^2 divide a $4CD$. Luego, existe un entero positivo h tal que

$$4CD = n^2 h \quad (14)$$

Ahora, sustituyamos (11) y (12) en (10):

$$R = \frac{CD (1 + 2 \frac{2m^2 - n^2}{n^2})}{\frac{2m}{n}} = \frac{CD (4m^2 - n^2)}{2mn} = \frac{4 CD m^2 - CD n^2}{2mn} = \frac{n^2 h m^2 - CD n^2}{2mn} \quad (\text{por (14)})$$

$$\text{Así, } R = \frac{nhm^2 - CD n}{2m} \quad (15)$$

De (15): por ser R entero, podemos asegurar que $2m$ divide a $nhm^2 - CDn$. Ahora bien, como m divide a $2m$, tenemos que m divide a $nhm^2 - CDn$. Como m divide a nhm^2 y es primo relativo con n , concluimos que m divide a CD . Por tanto, existe un entero positivo k tal que

$$CD = mk \quad (16)$$

Nótese que: $CD = mk \Rightarrow 4CD = 4mk$

$$\Rightarrow n^2 h = 4mk \quad \text{por (14)}$$

$$\Rightarrow m \text{ divide a } n^2 h$$

$$\Rightarrow m \text{ divide a } h \quad \text{ya que } m \text{ y } n \text{ son primos relativos}$$

En consecuencia, existe un entero positivo t tal que $h = mt \quad (17)$

$$\text{Sustituyendo (17) en (14): } 4CD = n^2 mt. \text{ De donde: } CD = \frac{n^2 mt}{4} \quad (18)$$

Sustituyendo (18) y (17) en (15):

$$R = \frac{n(mt)m^2 - \frac{n^2mt}{4}n}{2m} = \frac{4nm^3t - n^3mt}{8m} = \frac{4nm^2t - n^3t}{8} \quad (19)$$

Hay un dato que aún no hemos utilizado: $R - CD$ es un número primo. Para aligerar la notación, hagamos $R - CD = p$, siendo p primo. De (19) y (18), tenemos que

$$p = \frac{4nm^2t - n^3t}{8} - \frac{n^2mt}{4} = \frac{4nm^2t - n^3t - 2n^2mt}{8} = \frac{nt(4m^2 - n^2 - 2nm)}{8} \quad (20)$$

A continuación, exploraremos el miembro derecho de la igualdad (20), con la finalidad de encontrar una manera de expresar p como producto de enteros.

Se afirma que **n es par**. En efecto, si n es impar, también lo es la suma algebraica $4m^2 - n^2 - 2nm$. Por tanto, la única manera de expresar p como producto de enteros es la siguiente:

$$p = n \cdot \frac{t}{8} \cdot (4m^2 - n^2 - 2nm) \quad (21)$$

Por ser p número primo, dos de los tres factores enteros del miembro derecho de (21) deben ser iguales a 1 y el tercero debe ser p . Puesto que $n \neq 1$ (recuerde la igualdad (11)), se tiene que

$$n = p, \quad \frac{t}{8} = 1 \quad \text{y} \quad 4m^2 - n^2 - 2nm = 1$$

Nótese que : $4m^2 - n^2 - 2nm = 1 \Rightarrow 4m^2 - 2nm - (n^2 + 1) = 0$

$$\text{Luego, } m = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 + 16n^2 + 16}}{8} = \frac{2n \pm \sqrt{20n^2 + 16}}{8} = \frac{2n \pm 2\sqrt{5n^2 + 4}}{8} = \frac{n \pm \sqrt{5n^2 + 4}}{4}$$

Como m es entero, $5n^2 + 4$ debe ser un cuadrado perfecto. Así, existe un entero positivo w tal que $5n^2 + 4 = w^2$. De donde,

$$5n^2 = w^2 - 4 \Rightarrow 5n^2 = (w + 2)(w - 2) \quad (22)$$

Recordemos que $n = p$, siendo p primo impar. De manera que, en el miembro izquierdo de (22) tenemos el producto de tres números primos, mientras en el miembro derecho

tenemos el producto de dos enteros, a saber, $w + 2$ y $w - 2$, donde $w + 2 > w - 2$. Como $n \geq 3$, se presentan los siguientes casos:

- 1) $w + 2 = 5n^2$ y $w - 2 = 1$
- 2) $w + 2 = 5n$ y $w - 2 = n$
- 3) $w + 2 = n^2$ y $w - 2 = 5$

Los casos 1) y 2) quedan descartados ya que se obtienen las soluciones $w = 3$ y $n = 1$. Del caso 3), resulta que $w = 7$ y $n = 3$. Veamos cuál es el valor de m , si $n = 3$.

$$m = \frac{n \pm \sqrt{5n^2 + 4}}{4} = \frac{n \pm \sqrt{5n^2 + 4}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow m = \frac{5}{2} \quad \vee \quad m = -1$$

Encontramos una contradicción con el hecho de que m debe ser entero positivo. La contradicción provino de suponer que n es un número impar. Por tanto, n es par.

Sabiendo que n es par y que m y n son primos relativos, podemos asegurar que **m es impar**. Por tanto, la suma algebraica $4m^2 - n^2 - 2nm$ es múltiplo de 4, pero no de 8. En este caso, p puede ser expresado como producto de enteros de la siguiente manera:

$$p = \frac{nt}{2} \cdot \frac{4m^2 - n^2 - 2nm}{4} \quad (23)$$

Por ser p número primo, uno de los factores enteros del miembro derecho de (23) debe ser igual a 1 y el otro debe ser p . ¿Puede ser $\frac{nt}{2} = 1$? En caso afirmativo, $nt = 2$. Nótese que por ser n y t enteros positivos se tiene que:

$$nt = 2 \Rightarrow (n = 2 \wedge t = 1) \vee (n = 1 \wedge t = 2)$$

Pero, $n \neq 1$ y $n \neq 2$ (recuerde comentarios hechos en (11) y (12)). Por tanto, $\frac{nt}{2} = p$. Luego, es fácil deducir que

$$\frac{n}{2} = p, \quad t = 1 \quad \text{y} \quad \frac{4m^2 - n^2 - 2nm}{4} = 1$$

Así, $n = 2p$. Sustituyamos $n = 2p$ en la ecuación $\frac{4m^2 - n^2 - 2nm}{4} = 1$.

$$\frac{4m^2 - n^2 - 2nm}{4} = 1 \Rightarrow \frac{4m^2 - 4p^2 - 4pm}{4} = 1 \Rightarrow m^2 - pm - (p^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4p^2 + 4}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{5p^2 + 4}}{2}$$

Ahora, se sigue un razonamiento análogo al que se hizo anteriormente: como m es entero, $5p^2 + 4$ debe ser un cuadrado perfecto. Así, existe un entero positivo w tal que $5p^2 + 4 = w^2$. La solución es $p = 3$ y $w = 7$. Luego,

$$m = \frac{p \pm \sqrt{5p^2 + 4}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow m = 5 \quad \vee \quad m = -2$$

En resumen: $n = 2p = 6$, $m = 5$ y $t = 1$

$$\text{De (18): } \mathbf{CD = \frac{n^2 m t}{4} = 45}$$

$$\text{De (13): } \mathbf{BD = \frac{4 CD m^2}{n^2} - 2 CD = 35}$$

$$\text{De (19)} \quad \mathbf{R = \frac{4 n m^2 t - n^3 t}{8} = 48}$$

$$\text{Finalmente, } \mathbf{R - CD = 48 - 45 = 3}$$