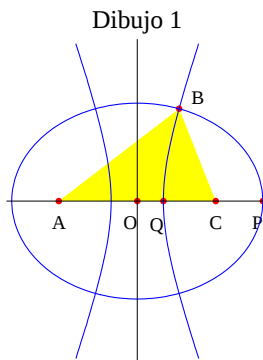

EH-triángulos

■ Sistema de referencia.

Tomemos $A = (-1,0)$ y $C = (1,0)$, lo que implica que $b = 2$. Ahora supongo que $c+a = 2e$ así que el vértice B está situado sobre una elipse de focos A y C , semieje horizontal e y excentricidad $\frac{1}{e}$.

De análoga manera, haciendo $c-a = 2h$, podemos considerar a B como punto de una hipérbola de excentricidad $\frac{1}{h}$.



En estas condiciones $B = (eh, S)$, siendo $S = \sqrt{(e^2 - 1)(1 - h^2)}$, área del triángulo ABC .

Si fijamos un valor de e y variamos h obtenemos una elipse y al revés, una hipérbola.

■ Circunferencias

Las 4 circunferencias inscritas tienen los siguientes incentros

$$I_A = (e, \frac{S}{1+h}), I_B = (-h, -\frac{S}{e-1}), I_C = (-e, \frac{S}{1-h}) \text{ e } I = (h, \frac{S}{e+1})$$

Sus ordenadas nos dan los respectivos radios pues todas son tangentes al eje X .

La circunferencia circunscrita tiene como centro $O = (0, \frac{-2+e^2+h^2}{2S})$ y como radio $R = \frac{(e-h)(e+h)}{2S}$

■ Problemas 144 (Gaceta V.12, nº4) y 193 (Gaceta V.15, nº1)

■ P 144

En un triángulo ABC , sean M el punto medio del lado AC , N el punto medio del arco AC que no contiene a B , I el incentro y T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado AC . Se denotan por a , b y c las longitudes de los lados del triángulo y por r el radio de la circunferencia circunscrita. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

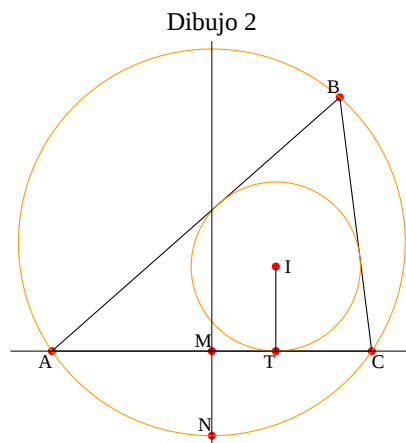
(a) $a + c = 2b$, (b) $AT \cdot TC = 3r^2$, (c) $MN = r$, (d) $IA \cdot IC = 2r \cdot IB$

■ P 193

Sean ABC un triángulo en el que las longitudes de sus lados verifican $a \leq b \leq c$ y están en progresión aritmética. Si para dicho triángulo S denota su área y r_a , r_b y r_c sus ex-inradios, probar que la magnitud $\frac{(r_a - r_c)S}{(a-c)b^2}$ es constante y hallar su valor.

■ Solución

Considero el problema 193 como un apartado más del problema 144 propuesto por la misma persona. El triángulo de los problemas cumple que $a+c = 2b$. Generalizaré la solución para triángulos cualesquiera $a+c = eb$. En el siguiente dibujo nos muestra la situación del problema 144



Ya conocemos los puntos A, B, C, O e I del dibujo. Además $M = (0,0)$ y es claro que $T = (h,0)$. N tiene abscisa 0. Su ordenada se obtiene haciendo OM-R. Resulta que $N = (0, -\frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{-1+e^2}})$.

(b). Como $T = (h, 0)$, $AT \cdot TC = (1+h) \cdot (1-h)$. Así que $\frac{AT \cdot TC}{r^2} = \frac{(1-h^2)(e+1)^2}{(-1+e^2)(1-h^2)} = \frac{e+1}{e-1}$

(c). Como $MN = \frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{-1+e^2}}$. Si dividimos r entre MN , $\frac{r}{MN} = \frac{\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}}{\frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{-1+e^2}}} = e-1$, por tanto $MN = \frac{r}{e-1}$.

(d). Pasamos a calcular el cociente $\frac{IA \cdot IC}{r \cdot IB} = \frac{2}{e-1}$ que implica esta propiedad.

Un cálculo directo nos da

$$\frac{IA \cdot IC}{r \cdot IB} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{(1+h)(e+h)}{1+e}} \sqrt{2} \sqrt{\frac{(e-h)(1-h)}{1+e}}}{\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e} \cdot \sqrt{\frac{(-1+e)(e^2-h^2)}{1+e}}} = 2 \sqrt{\frac{(e^2-h^2)(1-h^2)}{(-1+e^2)(1-h^2)(-1+e)(e^2-h^2)}} = 2 \sqrt{\frac{1+e}{(-1+e^2)(-1+e)}} = \frac{2}{e-1}$$

Añado dos relaciones más.

(e). Sabemos que la altura sobre b es la ordenada del punto B, $h_B = S$

Como $r = \frac{S}{1+e}$ resulta que $\frac{h_B}{r} = \frac{S}{\frac{S}{1+e}} = 1+e$.

(f). Y como $r_B = \frac{S}{-1+e}$ resulta que $\frac{h_B}{r_B} = \frac{S}{\frac{S}{-1+e}} = e-1$.

Y concluyo con el p. 193

$$\frac{(r_a - r_c) S}{(a-c) b^2} = \frac{\left(\frac{S}{1+h} - \frac{S}{1-h}\right) S}{-8 h} = \frac{S^2}{2(-1+h^2)} = \frac{(e^2-1)(1-h^2)}{2(-1+h^2)} = \frac{e^2-1}{4}$$

Si $e = 2$ obtenemos los valores numéricos que pedían estos problemas.

■ Mi problema

■ Enunciado

Dada una hipérbola de focos A y C y un punto variable B de la misma. Demostrar que los incentros de los triángulos ABC están alineados. Calcular los segmentos que limitan.

■ Solución

Al calcular el incentro $I = (h, \frac{S}{1+e})$ vi que estaba sobre la vertical $x = h$ que pasa por un vértice de la hipérbola y se me ocurrió el enunciado.

Además si $e \rightarrow \pm\infty$ la ordenada toma el valor $\pm\sqrt{1-h^2}$. El segmento buscado tiene extremos $(h, -\sqrt{1-h^2})$ y $(h, \sqrt{1-h^2})$.

■ Enunciado general

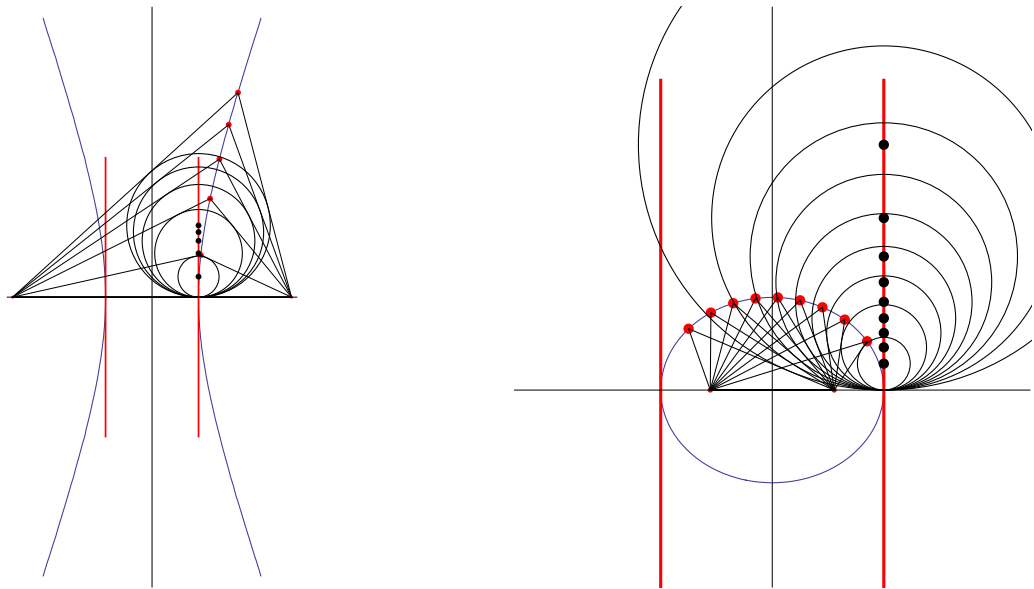
Sean las dos cónicas (una elipse α y una hipérbola β) de focos A y C que pasan por un punto P. Sea B un punto variable de estas cónicas. Además denotamos por I el incentro de ABC e I_A, I_B, I_C sus ex-incentros opuestos, respectivamente, a los vértices A, B y C. Se pide:

- * Demostrar que si B recorre α todos los I_A están alineados, lo mismo que todos los I_C .
- * Demostrar que si B recorre β todos los I están alineados, lo mismo que todos los I_B .
- * Obtener los lugares geométricos descritos por los puntos anteriores.

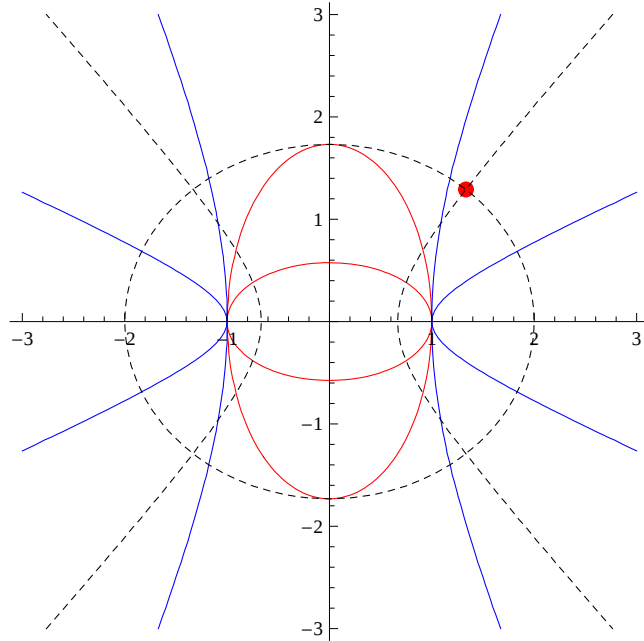
Se completaría el problema con los lugares geométricos de I e I_B en el primer caso y de I_A e I_C en el segundo.

Las soluciones se ven (eso espero) en los dibujos.

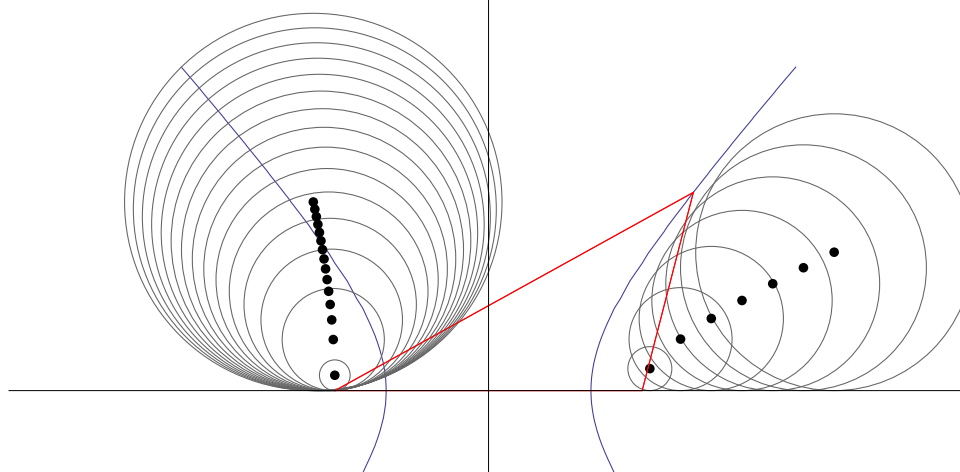
Dibujo 3



Dibujo 4



Dibujo 5



■ Otras relaciones

Hay muchas expresiones que relacionan los lados y los in-radios algunas de las cuales se obtienen rápidamente con esta notación.

Es muy conocida $\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1+h}{S} + \frac{e-1}{S} + \frac{1-h}{S} = \frac{e+1}{S} = \frac{1}{r}$.

O también $r_A \cdot r_B \cdot r_C \cdot r = \frac{S}{1+h} \cdot \frac{S}{e-1} \cdot \frac{S}{1-h} \cdot \frac{S}{e+1} = \frac{S^4}{S^2} = S^2$ que con algún truco da

$$r_A \cdot r_B \cdot r_C \cdot r = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}{16}.$$

Si además calculamos los radios R (circunscrita), r_9 (9 puntos) y r_3 (pasa por los ex-incentros) y que son con esta notación $R = \frac{(e-h)(e+h)}{2S}$, $r_9 = \frac{(e-h)(e+h)}{4S} = \frac{R}{2}$, $r_3 = \frac{(e-h)(e+h)}{S} = 2R$, las combinaciones

aumentan. Por ejemplo $r_A + r_B + r_C - r - r_9 - r_3 = \frac{3R}{2}$.