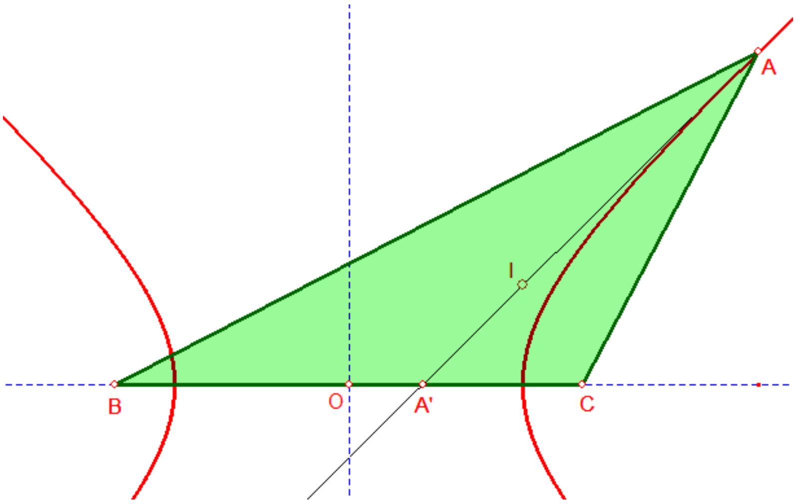
**Problema 689.**

Dada una hipérbola de focos A y C y un punto variable B de la misma sobre una de sus ramas. Demostrar que los incentros de los triángulos ABC están alineados.

Beade, C. (2013): Comunicación personal.

**Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.**

De la construcción realizada y tomando como es de costumbre los ejes focales como nuestro sistema de referencia habitual, podemos etiquetar los puntos A (de la hipérbola), B (Foco) y C (Foco), con las siguientes coordenadas cartesianas:




$$d(A,B)-d(B,C)=2a$$

$$B=(-c,0), C=(c,0), A=(x_0,y_0)$$

$$\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}=1;\quad c^2=a^2+b^2$$

La bisectriz interna correspondiente al vértice A del triángulo ABC no es otra que la tangente a la hipérbola por dicho punto.

Así tenemos que $\quad v_a \equiv y=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$

Esta bisectriz $v_a$ corta al eje focal real en el punto A' que, por tanto, tendrá de coordenadas

$A'=(x_0-\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0},0)$, siendo así que los segmentos m=BA' y n=A'C medirán respectivamente

$$m=\overline{BA'}=x_0-\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}+c;\quad n=\overline{A'C}=c-x_0+\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}$$

Por el teorema de la bisectriz, tendremos las siguientes relaciones:

$$\frac{AB}{m}=\frac{AC}{n}=\frac{AB-AC}{m-n}=\frac{AB+AC}{m+n}$$

En particular, de las dos últimas re3laciones deducimos que

$$\frac{AB-AC}{m-n}=\frac{AB+AC}{m+n}\Rightarrow\frac{2a}{m-n}=\frac{AB+AC}{2c}\Rightarrow AB+AC=\frac{4ac}{m-n}$$

En concreto, $AB+AC=\dfrac{4ac}{m-n}=\dfrac{4ac}{2x_0-\dfrac{2a^2}{b^2}\dfrac{y_0{}^2}{x_0}}=\dfrac{2acb^2x_0}{b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2}=\dfrac{2acb^2x_0}{a^2b^2}=\dfrac{2c}{a}x_0$

Por tanto, el semiperímetro del triángulo ABC será igual $s=\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2c}{a}x_0+2c)=\dfrac{c(x_0+a)}{a}$

Por fin, el área S del triángulo ABC vendrá dado por las siguientes expresiones:

$$S=s.r=\frac{1}{2}\overline{BC}.h_a\rightarrow r=\frac{1}{2s}\overline{BC}.h_a=\frac{2c.y_0}{2\dfrac{c(x_0+a)}{a}}=\frac{ay_0}{x_0+a}$$

En definitiva, el valor del inradio es $r=\dfrac{ay_0}{x_0+a}$. De esta forma ya sí podemos determinar la posición del Incentro, I, de nuestro triángulo ABC.

Bastará considerar la intersección de las rectas $v_a$ y $y=r$.
El punto I tendrá las siguientes coordenadas,

$$r=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0\rightarrow x=\frac{a^2y_0(r-y_0)}{b^2x_0}+x_0$$

$$x=\frac{a^2y_0(\dfrac{ay_0}{x_0+a}-y_0)}{b^2x_0}+x_0=\frac{-a^2y_0{}^2x_0+b^2x_0{}^2(x_0+a)}{b^2x_0(x_0+a)}$$

$$x=\frac{\left(-b^2x_0{}^2+a^2b^2\right)x_0+b^2x_0{}^2(x_0+a)}{b^2x_0(x_0+a)}=\frac{a^2b^2x_0+ab^2x_0{}^2}{b^2x_0(x_0+a)}=\frac{ab^2x_0(x_0+a)}{b^2x_0(x_0+a)}$$

$$x=a$$

En efecto, los incentros de los triángulos ABC están alineados y pertenecen a las rectas $x=\pm a$, que son las rectas tangentes a la hipérbola dada por los respectivos vértices de la misma.