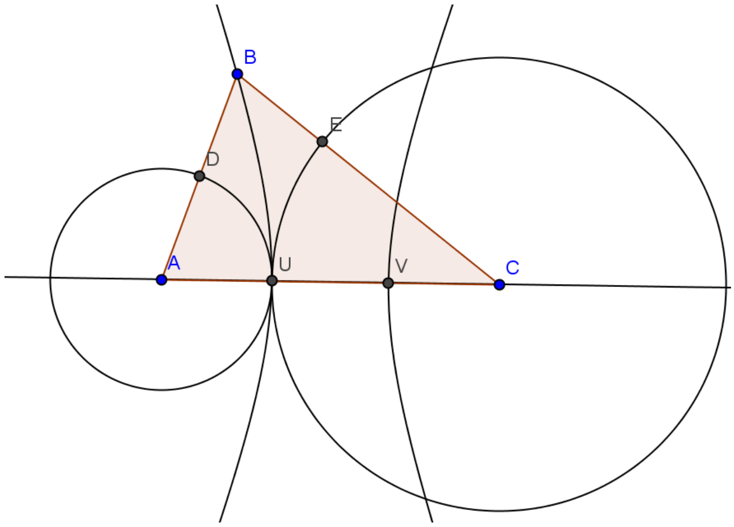
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.
Problema 689.
Dada una hipérbola de focos A y C y un punto variable B de la misma sobre una de sus ramas. Demostrar que los incentros de los triángulos ABC están alineados.
Beade, C. (2013): Comunicación personal.

Dado el triángulo ABC, sean U y V los vértices de la hipérbola.

Es AU=CV=m, UV=2a.



Supongamos B sobre la rama que contiene al vértice U.

Tracemos las circunferencias de centros A y radio AU que cortará a AC en D, y de centro C y radio CU, que cortará a CB en E.

Será AB=AD+DB=m+p. CB= CE+EB=(m+2a)+ q.

Al ser B de la hipérbola debe ser

BC-BA=2a. Es decir, [(m+2a)+q] -[m+p]=2a, de donde m=p.

Así pues la circunferencia circunscrita a EDU es la inscrita a ABC.

Ello indica que el incentro pedido es perpendicular al eje mayor de la hipérbola por el vértice U.