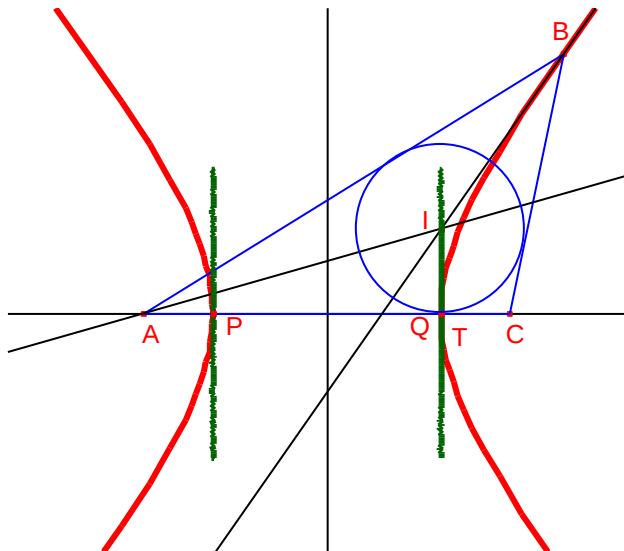


Problema 689

Donada la hipèrbola de focus A i C i un punt B de la hipèrbola sobre una de les seues rames. Proveu que els incentres dels triangles $\triangle ABC$ estan alineats.

Solució de Ricard Peiró:



Siga la hipèrbola de distància focal $\overline{AC} = 2c$ i eix major $\overline{PQ} = 2a$.

Siga B un punt de la hipèrbola.

Per definició de la hipèrbola, $\overline{AB} - \overline{AC} = 2a$.

Siga $\overline{BC} = x$, aleshores, $\overline{AB} = 2a + x$.

Siga I l'incentre del triangle $\triangle ABC$.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$.

$$\overline{CT} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2}.$$

$$\overline{CT} = \frac{2c + x - (2a + x)}{2} = c - a.$$

Aleshores, l'incentre I pertany a la recta perpendicular a l'eix de simetria de la hipèrbola que passa pel vèrtex.