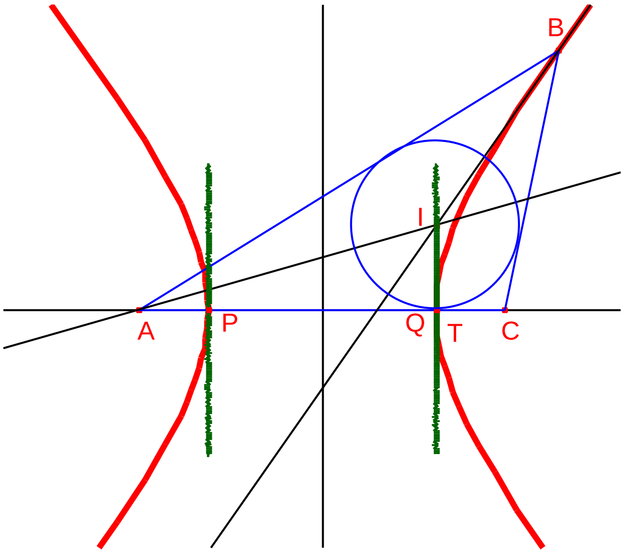
Problema 689

Dada una hipérbola de focos A y C y un punto variable B de la misma sobre una de sus ramas. Demostrar que los incentros de los triángulos ABC están alineados.

Beade, C. (2013): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:



Sea la hipérbola de distancia focal $\overline{AC}=2c$ y eje mayor $\overline{PQ}=2a$.

Sea B un punto de la hipérbola.

Por definición de la hipérbola, $\overline{AB}-\overline{AC}=2a$.

Sea $\overline{BC}=x$, entonces, $\overline{AB}=2a+x$.

Sea I el incentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$\overline{CT}=\frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}.$$

$$\overline{CT}=\frac{2c+x-(2a+x)}{2}=c-a.$$

Entonces, el incentro I pertenece a la recta perpendicular al eje de simetría de la hipérbola que pasa por el vértice Q.