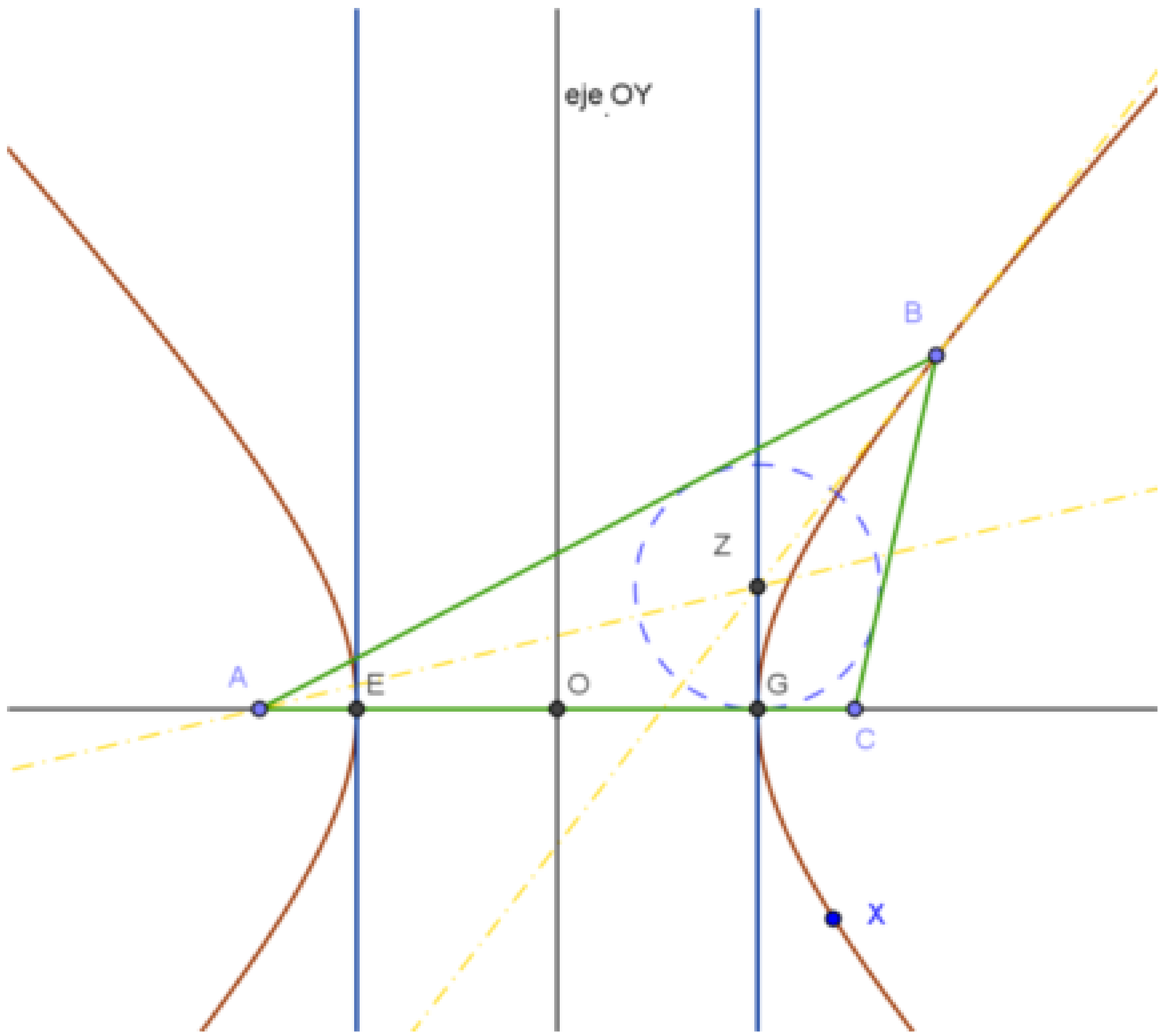
Propuesto por César Beade Franco, I.E.S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

***Problema* 689.**-*Dada una hipérbola de focos A y C y un punto variable B de la misma sobre una de sus ramas. Demostrar que los incentros de los triángulos ABC están alineados.*

Beade, C. (2013). Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Si Z es el incentro de ABC y G su proyección ortogonal sobre AC sabemos que la medida del segmento AG es $s - BC$, donde s es el semiperímetro de ABC.

Si se toma B en la rama derecha de la hipérbola, tomando los parámetros a, b y c según es habitual en esta cónica, tendremos que $AB = BC + 2a$ y $AC = 2c$, por tanto el perímetro de ABC es $2s = (BC + 2a) + BC + 2c$, $s = BC + a + c$ y de ahí $AG = s - BC = a + c$, por tanto G es el vértice de la rama derecha de la hipérbola. Resumiendo, **TODOS los triángulos** con el vértice B sobre la rama derecha de la hipérbola **tienen el incentro** situado **sobre la perpendicular a AC por el vértice G**, esto es, sobre la tangente en ese vértice.

Si B se toma sobre la rama izquierda, entonces B dista de A menos que de C, las longitudes de los lados son ahora $BC - 2a$, BC y $2c$. Ahora obtendríamos la otra tangente en el vértice E. ∎