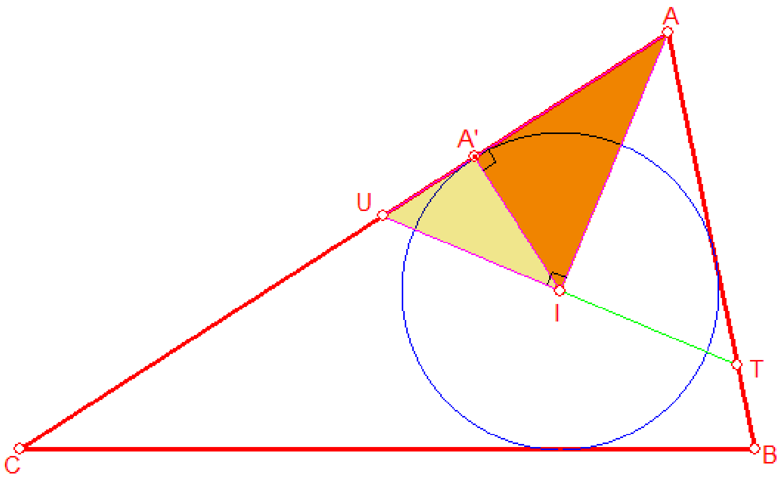
Problema 690.

Dado un triángulo ABC, sea I su Incentro. Tracemos la perpendicular a AI por I, que cortará a AB en T y a AC en U con AT=AU. Expresar AT=AU en función de a, b, c.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

De la construcción realizada se observan los siguientes hechos de interés:



a) Los segmentos AT y AU son iguales. Para ello, observamos que ambos segmentos son las hipotenusas de los dos triángulos rectángulos congruentes, AIU y AIT, respectivamente.

b) Si nos fijamos en el triángulo rectángulo AIU, el segmento IA' es la altura relativa a la hipotenusa AU. Por el teorema de la altura $IA'^2 = AA'.A'U$. Como $IA' = r$ y $AA' = p-a$, tenemos que $A'U = \frac{IA'^2}{AA'} = \frac{r^2}{p-a}$, siendo r = inradio del triángulo ABC y $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, semiperímetro del mismo.

c) Por otro lado, tenemos la siguiente equivalencia dada por el valor S, del Área del Triángulo ABC.

$$\left.\begin{array}{l} S = p.r \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

d) En definitiva $A'U = \frac{r^2}{p-a} = \frac{(p-b)(p-c)}{p}$ y así, tenemos que $AU = AA' + A'U = p-a+\frac{(p-b)(p-c)}{p}$

e) Desarrollando esta última expresión:

$$AU = p-a+\frac{(p-b)(p-c)}{p} = \frac{p^2-pa+p^2-(b+c)p+bc}{p} = \frac{2p^2-p(a+b+c)+bc}{p} = \frac{2p^2-2p^2+bc}{p} = \frac{bc}{p}$$

Concluyendo, $AT = AU = \frac{bc}{p} = \frac{2bc}{a+b+c}$.