Problema 690

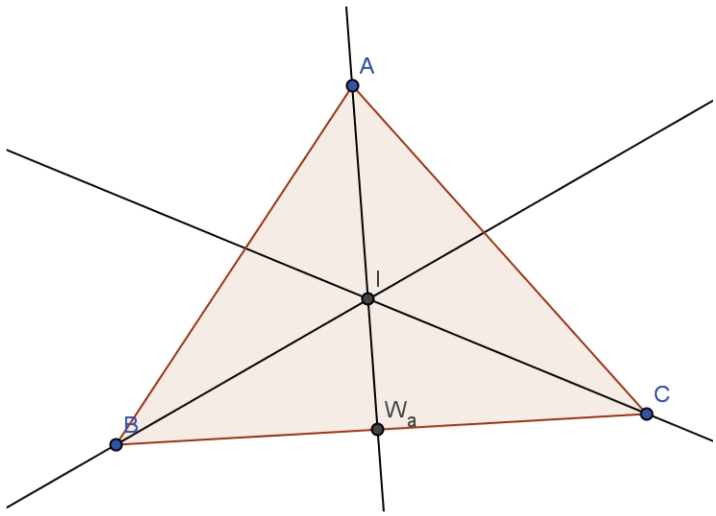
Dado un triángulo ABC, sea I su incentro.

Tracemos la perpendicular a AI por I, que cortará a AB en T y a AC en U con AT=AU.

Expresar AT=AU en función de a,b, c.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución del director:



Sea W_a el pie de la bisectriz del ángulo A.

En el primer problema (http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/problema1.htm) de esta revista de investigación, publicado en Septiembre de 2000, se tenía que $\frac{W_aB}{b}=\frac{W_ac}{c}$.

Usando el teorema de Stewart, que el profesor Damián Aranda utilizó en la solución del problema 63 (http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol63da.htm),

$$(AW_a)^2a=(BW_a)c^2+(CW_a)b^2-(BW_a)(W_aC)a$$

Se llega a tener el conocido valor de AW_a, que es $AW_a=\sqrt{bc(1-\frac{a^2}{(b+c)^2})}$

Según el problema 345, $\frac{AI}{IW_a}=\frac{b+c}{a}$, tomado del libro del profesor Saturnino Campo, (Campo, S. (2005) Métodos sintéticos de la geometría. Edición de autor. Salamanca. (p.15)) que tuvo en Octubre de 2006 cuatro soluciones,

http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol345garcap/sol345garcap.htm

de Francisco Javier García Capitán

http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol345peicat.htm

de Ricard Peiró i Estruch

http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol345sat.htm

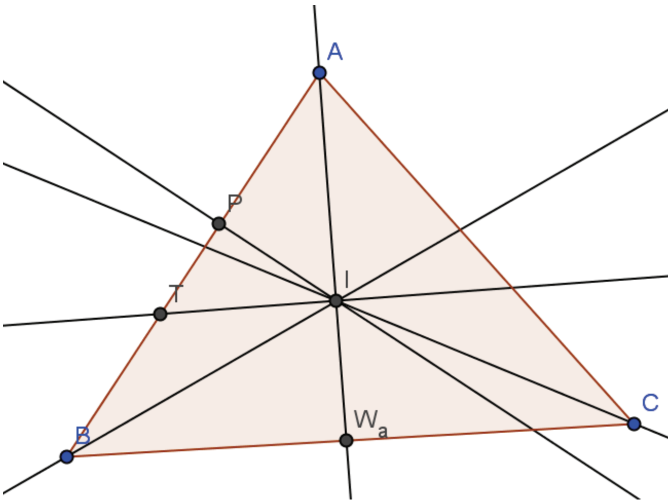
de Saturnino Campo Ruiz

http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol345wil.htm

de William Rodríguez Chamache.

Así tenemos que $AI = \frac{b+c}{a+b+c}\sqrt{bc(1-\frac{a^2}{(b+c)^2})}$

Tracemos la perpendicular a AI por I, que cortará a AB en T, y a AB por I, que cortará a AB en P.



Tenemos que $AP = \frac{b+c-a}{2}$.

Y es $\frac{AT}{AI} = \frac{AI}{AP}$, por la semejanza de los triángulos AIP y ATI.

Por tanto, es $AT = \frac{AI^2}{AP}$.

Haciendo operaciones, desarrollando y simplificando, se obtiene lo pedido:

$$AT = \frac{2bc}{a+b+c}$$

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla. España.