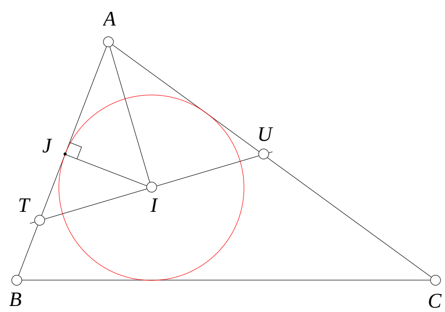
Problema 690. Dado un triángulo ABC, sea I su incentro. Tracemos la perpendicular a AI por I, que cortará a AB en T y a AC en U con $AT = AU$. Expresar $AT = AU$ en función de a, b, c.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Soluzione di Ercole Suppa

Siano $\triangle$, s, r l'area, il semiperimetro e l'inraggio di $\triangle ABC$ rispettivamente.



Indicata con J la proiezione di I su AB, dal triangolo rettangolo $\triangle AJI$ abbiamo:

$$r = AI \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \qquad \Rightarrow \qquad AI = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} \tag{1}$$

Dal triangolo rettangolo $\triangle AIT$, tenuto conto della (1) e delle note relazioni

$$\triangle = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \qquad , \qquad r = \frac{\triangle}{s} \tag{2}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} AT &= \frac{AI}{\cos \dfrac{A}{2}} = \frac{r}{\operatorname{sen} \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{A}{2}} = \frac{2r}{\operatorname{sen} A} = \\ &= \frac{2\triangle}{s \cdot \operatorname{sen} A} = \frac{bc \operatorname{sen} A}{s \cdot \operatorname{sen} A} = \frac{bc}{s} = \frac{2bc}{a+b+c} \end{aligned}$$

□