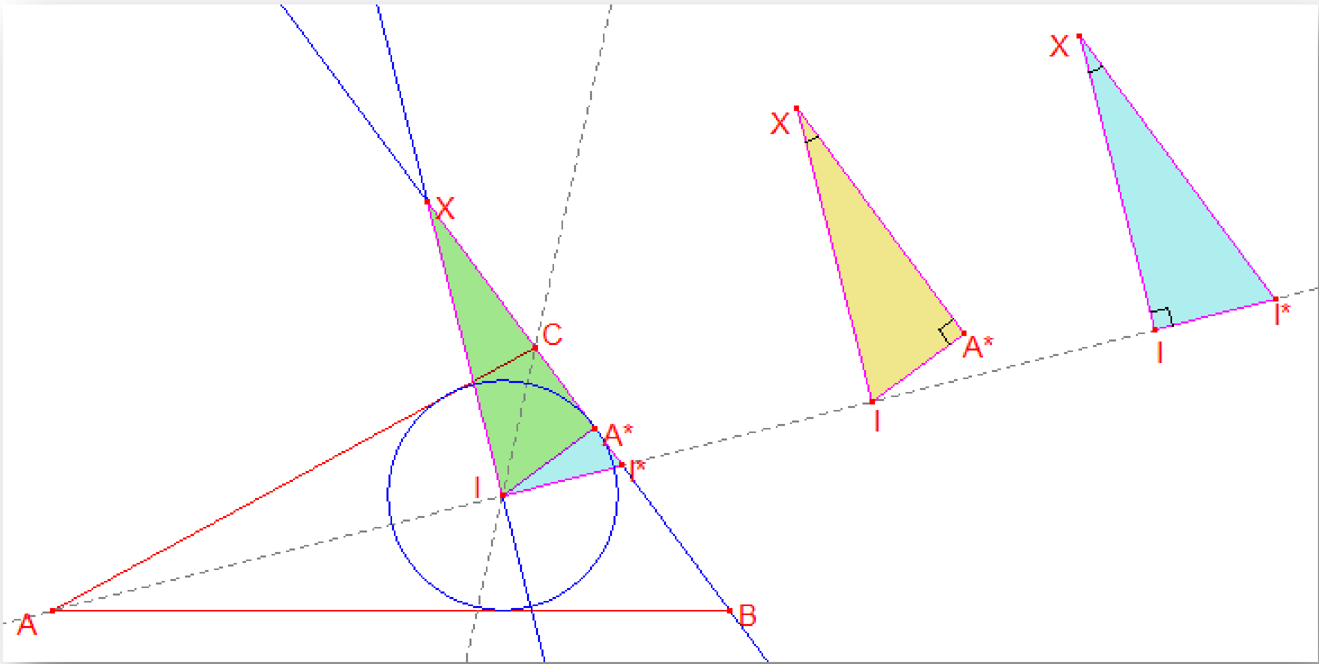
Problema 691.-
Dado un triángulo ABC con a<b<c, sea I el Incentro. Sea r la recta perpendicular a AI por el punto I. Cortará a la recta BC en X.
a) Calcular CX y BX en función de a, b y c.
b) Sea U el punto de corte de la bisectriz del ángulo BAC con la circunferencia circunscrita, que coincide con el punto medio del arco BC. Tracemos la recta XU, que cortará de nuevo a la circunscrita en T. Demostrar que T es el punto de tangencia de la circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y también es tangente interior a la circunscrita.
c) Construyamos de manera análoga a X, Y sobre el lado AC, y Z sobre el lado AB. Demostrar que X, Y, Z están alineados.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

De la construcción realizada se observan los siguientes hechos de interés:



a) Los triángulos rectángulos XIA* y XII* son semejantes. Obtengamos la medida común del ángulo en el vértice X.

Como $\measuredangle XI*I = 180^{o} - (\frac{A}{2}+C) = \frac{A}{2}+B \Rightarrow \measuredangle X = \measuredangle IXA* = \measuredangle IXI* = 90-(\frac{A}{2}+B) = \frac{C-B}{2}$

b) Por tanto, $\tan \measuredangle X = \tan\frac{C-B}{2} = \frac{r}{A^{*}X} \Rightarrow A^{*}X = \frac{r}{\tan\frac{C-B}{2}}$

Ahora bien, $\tan\frac{C-B}{2} = \frac{\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}} = \frac{\frac{r}{p-c}-\frac{r}{p-b}}{1+\frac{r^2}{(p-c)(p-b)}}$

Ahora bien, como $p^2r^2 = p(p-a)(p-c)(p-b) \Rightarrow r^2 = \frac{(p-a)(p-c)(p-b)}{p}$

Así tenemos que:

$$\tan\frac{C-B}{2}=\frac{r(p-b-p+c)}{(p-c)(p-b)+\dfrac{(p-a)(p-c)(p-b)}{p}}=\frac{pr(-b+c)}{(p-c)(p-b)[p+(p-a)]}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)(c-b)r}{\frac{1}{2}(a+b-c)\frac{1}{2}(a-b+c)(b+c)}$$

Así ya tenemos el valor del segmento $A^*X=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c)}{2(a+b+c)(c-b)}$

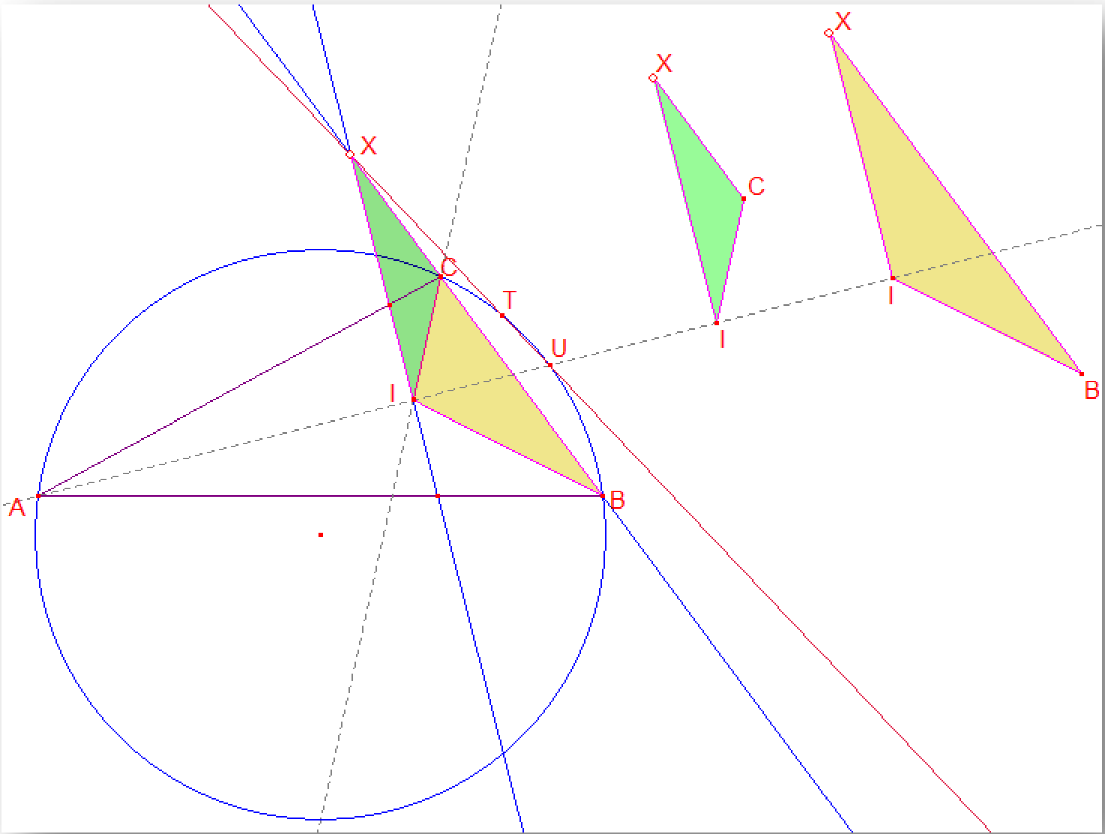
Y, consecuentemente el de CX.

$$CX=A^*X-A^*C=\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c)}{2(a+b+c)(c-b)}-\frac{1}{2}(a+b-c)$$

Operando, obtenemos por fin que:

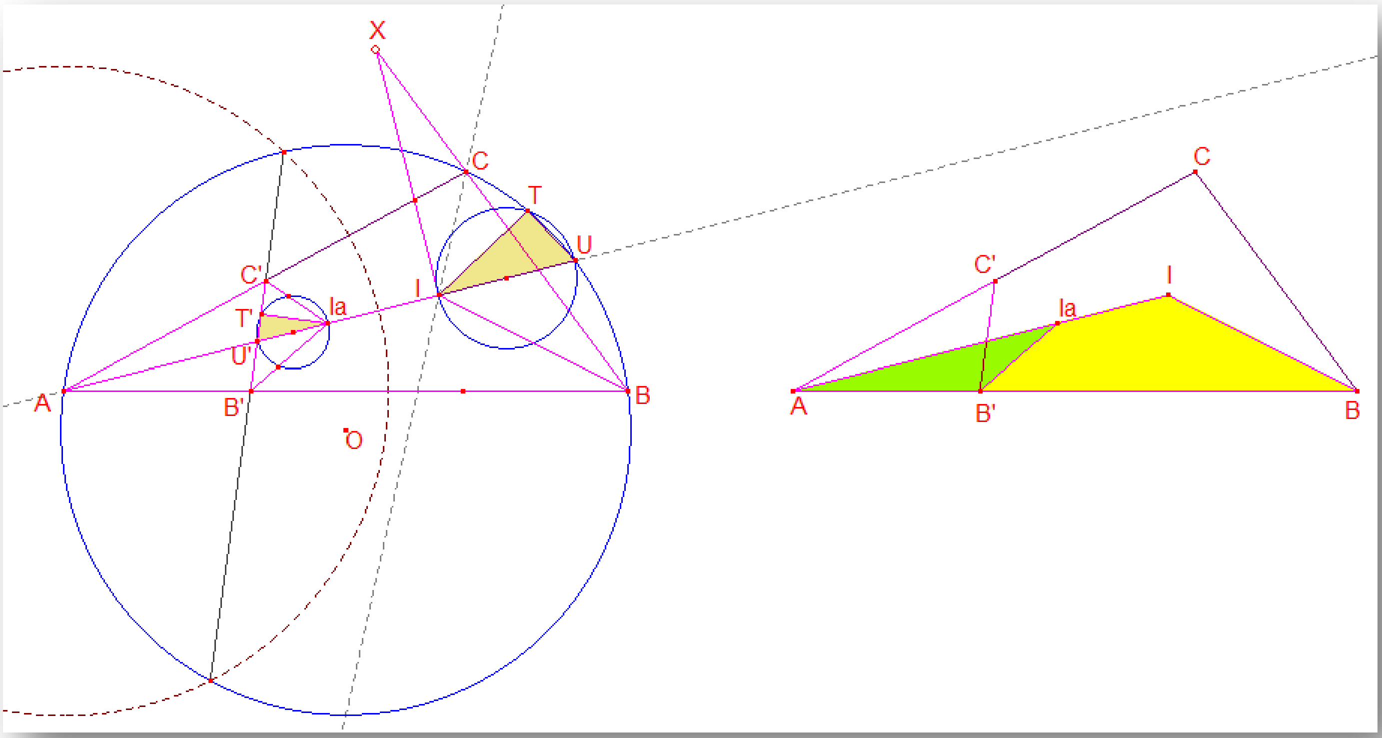
$$CX=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-b)}\ \text{ y }\ BX=BC+CX=a+\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-b)};\ BX=\frac{ac(a-b+c)}{(a+b+c)(c-b)}$$

b) Sea U el punto de corte de la bisectriz del ángulo BAC con la circunferencia circunscrita, que coincide con el punto medio del arco BC. Tracemos la recta XU, que cortará de nuevo a la circunscrita en T. Demostrar que T es el punto de tangencia de la circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y también es tangente interior a la circunscrita.

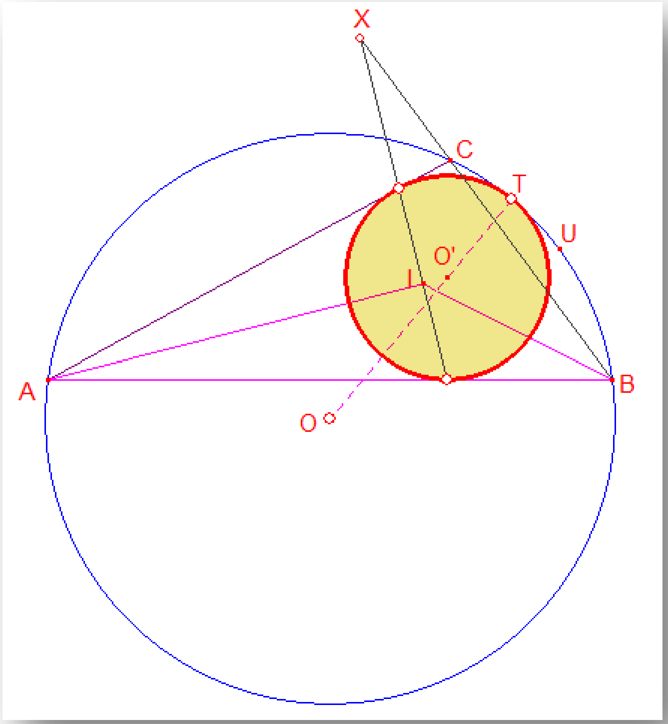


Al tener dos ángulos iguales los triángulos XCI y XIB, que son el común en el vértice X y el ángulo $\measuredangle XIC=90^\circ-\dfrac{A+C}{2}=\dfrac{B}{2}=\measuredangle XBI$, ambos triángulo son semejantes. Por tanto, $\dfrac{XI}{XC}=\dfrac{XB}{XI}\Rightarrow XI^2=XB.XC$

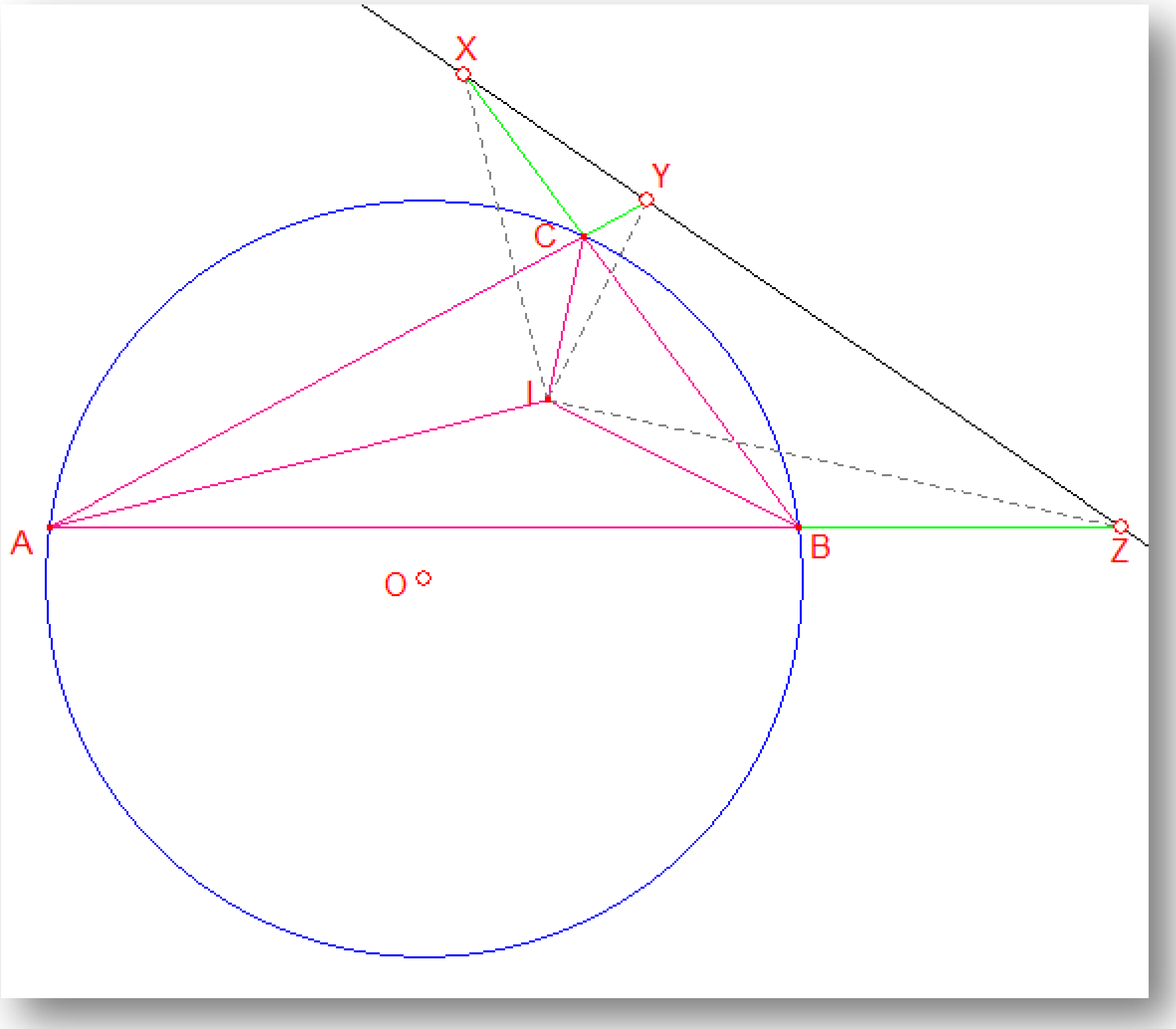
Ahora bien, los triángulos XTI y XIU tienen en común el ángulo en el vértice X. A partir de la anterior igualdad $XI^2=XB.XC$, se obtiene también $XI^2=XB.XC=XT.XU\Rightarrow\dfrac{XI}{XT}=\dfrac{XU}{XI}$ y, en consecuencia también son semejantes ambos triángulos. Por tanto, el ángulo $\measuredangle XTI=90^\circ=\measuredangle UTI$, condición que, como ahora veremos, caracteriza al punto de tangencia T de la circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y también es tangente interior a la circunscrita.



Por la inversión de centro el vértice A, resultan los siguientes pares de puntos homólogos; B-B', C-C', U-U' y, aún más interesante el par I_a-I , como se puede apreciar por la semejanza de triángulos existentes entre AI_aB' y ABI . De esta forma la circunferencia de diámetro $U'I_a$ se transforma en la circunferencia de diámetro IU. Por ello, el punto T, que pertenece a la circunferencia circunscrita deberá pertenecer también a aquélla de diámetro IU, pues se corresponderá con el segundo punto de intersección de la circunferencia de diámetro $U'I_a$ con el eje radical de ambas circunferencias, la circunscrita y la de centro, el punto A. Como $T'I_a$ es perpendicular al eje radical, este punto T' es el de tangencia de la circunferencia exinscrita, de centro I_a y se corresponde con el punto T, de tangencia de la circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y también es tangente interior a la circunscrita.



c) Construyamos de manera análoga a X, Y sobre el lado AC, y Z sobre el lado BC. Demostrar que X, Y, Z están alineados.



Análogamente a la construcción del punto X realizada en el apartado a), tenemos para los puntos Y y Z las siguientes medidas:

$CX=\dfrac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-b)}$ $BX=\dfrac{ac(a-b+c)}{(a+b+c)(c-b)}$	$BZ=\dfrac{ac(a-b+c)}{(a+b+c)(b-a)}$ $AZ=\dfrac{bc(-a+b+c)}{(a+b+c)(b-a)}$	$CY=\dfrac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-a)}$ $AY=\dfrac{bc(-a+b+c)}{(a+b+c)(-a+c)}$

Veamos que se cumple el Teorema de Menelao, $\dfrac{CX}{BX}.\dfrac{BZ}{AZ}.\dfrac{AY}{CY}=1$ y así de este modo, en efecto, los puntos X, Y y Z estarán alineados.

Para ello:

$$\frac{CX}{BX}.\frac{BZ}{AZ}.\frac{AY}{CY}=\frac{\dfrac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-b)}.\dfrac{ac(a-b+c)}{(a+b+c)(b-a)}.\dfrac{bc(-a+b+c)}{(a+b+c)(-a+c)}}{\dfrac{ac(a-b+c)}{(a+b+c)(c-b)}.\dfrac{bc(-a+b+c)}{(a+b+c)(b-a)}.\dfrac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-a)}}$$

$$\frac{CX}{BX}.\frac{BZ}{AZ}.\frac{AY}{CY}=\frac{(a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)}{(a-b+c).(-a+b+c).(a+b-c)}=1$$