Problema 691.

Dado un triángulo ABC con a<b<c, sea I el incentro. Sea r la recta perpendicular a AI por el punto I. Cortará a la recta BC en X.

a) Calcular CX y BX en función de a,b,c.

b) Sea U el punto de corte de la bisectriz del ángulo BAC con la circunferencia circunscrita, que coincide con el punto medio del arco BC. Tracemos la recta XU, que cortará de nuevo a la circunscrita en T. Demostrar que T es el punto de tangencia de la circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y tambíen es tangente interior a la circunscrita.

c) Construyamos de manera análoga a X, Y sobre el lado AC, y Z sobre el lado BC. Demostrar que X,Y,Z están alineados.

Barroso, R. (2013): Comunicación personal.

Solución del director de los apartados a) y c)

a)En el problema 690 se observó que la recta r cortaba a los lados AB y AC en sendos puntos T y U tales que AT=AU=(2bc)/(a+b+c)

De esta manera TB=c- ((2bc)/(a+b+c))= (ca-cb+c^2)/(a+b+c).

UC=b-((2bc)/(a+b+c))= (ba-cb+b^2)/(a+b+c).

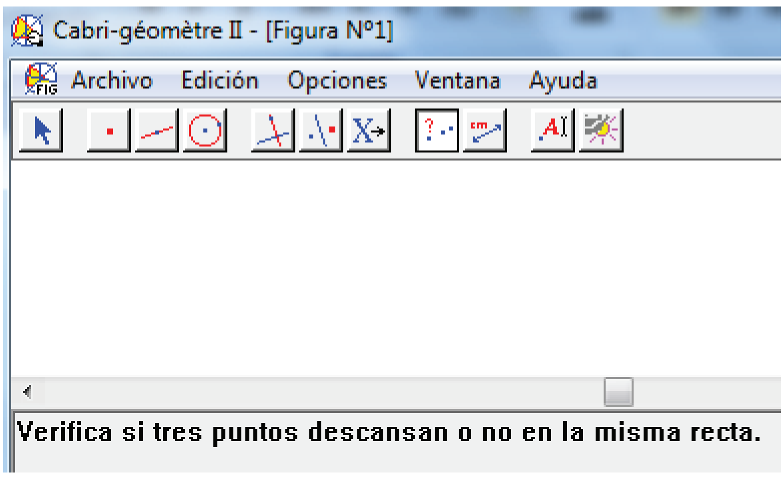
Sea x=CX. Por Menelao, será:

(AT) (CU) (BX)=(AU) (CX) (BT)

Es decir: $\left(\frac{2bc}{a+b+c}\right)\left(\frac{ba-cb+b^2}{a+b+c}\right)(a+x)=\left(\frac{2bc}{a+b+c}\right)x\left(\frac{ca-cb+c^2}{a+b+c}\right)$

O sea, $CX=x=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(c-b)}$; $BX=a+x=\frac{ac(a+c-b)}{(a+b+c)(c-b)}$

b) Este resultado lo obtuve de manera experimental con Cabri, que, como es bien sabido, en sus menús da la posibilidad de preguntar si tres puntos están alineados.



Es para mí una enorme satisfacción observar que mis amigos y colaboradores Saturnino Campo Ruiz (http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol691sat.pdf) y Damián

Aranda Ballesteros (http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol691dam.pdf), con distintos instrumentos geométricos lo han corroborado.

c) X Y Z están alineados.

Por razonamiento análogo al realizado en a), tenemos:

$$y = CY = \frac{ba(a+b-c)}{(a+b+c)(c-a)}, b + y = \frac{bc(b+c-a)}{(a+b+c)(c-a)}$$

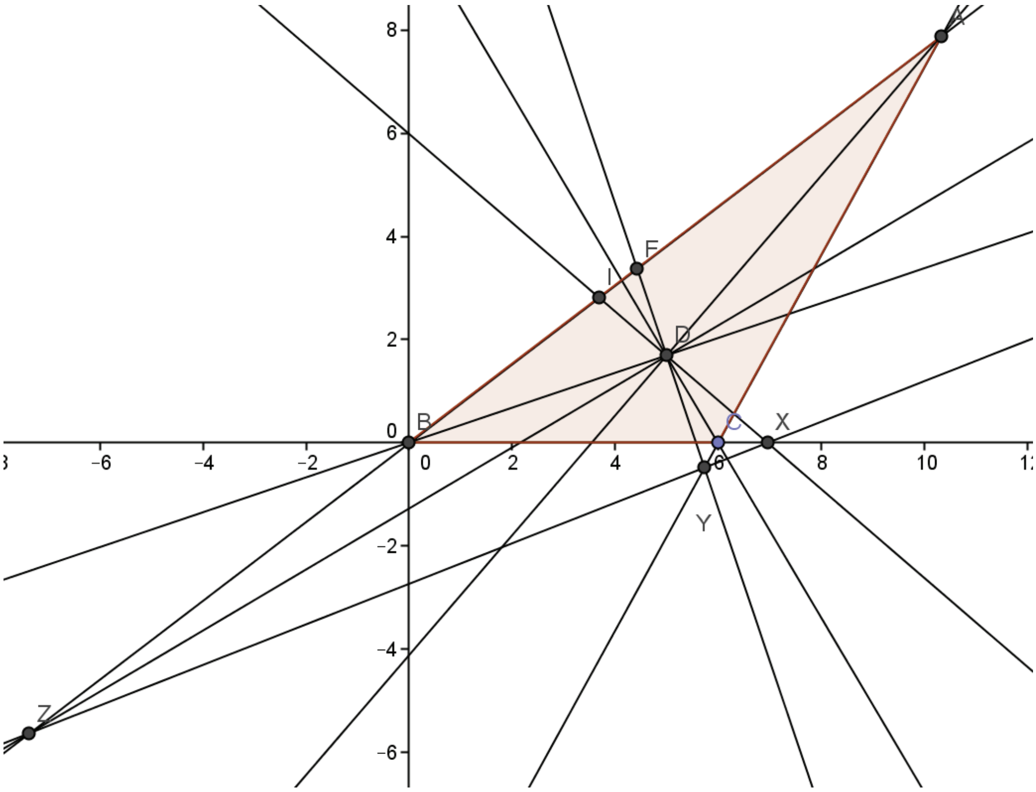
Así como:

$$z = BZ = \frac{ca(a+c-b)}{(b-a)(a+b+c)}, z + c = AZ = \frac{cb(c+b-a)}{(b-a)(a+b+c)}$$

Por Menelao, tenemos: (CX) (BZ) (AY)=(CY)(BX)(AZ), como se deduce al desarrollar.

Observación:Es de reseñar que según mis observaciones, los puntos Y, Z no aparecen en la tabla de Kimberling que tiene catalogados hoy en día 5549 puntos

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/Search_13_6_9.html



Y -0,482945288416296

Z -5,634361698190107

Ricardo Barroso Campos.
Jubilado.
Sevilla. España.