

**Problema 691.-** Dado un triángulo  $ABC$  con  $a < b < c$ , sea  $I$  el incentro. Sea  $r$  la recta perpendicular a  $AI$  por el punto  $I$ . Cortará a la recta  $BC$  en  $X$ .

a) Calcular  $CX$  y  $BX$  en función de  $a, b, c$ .

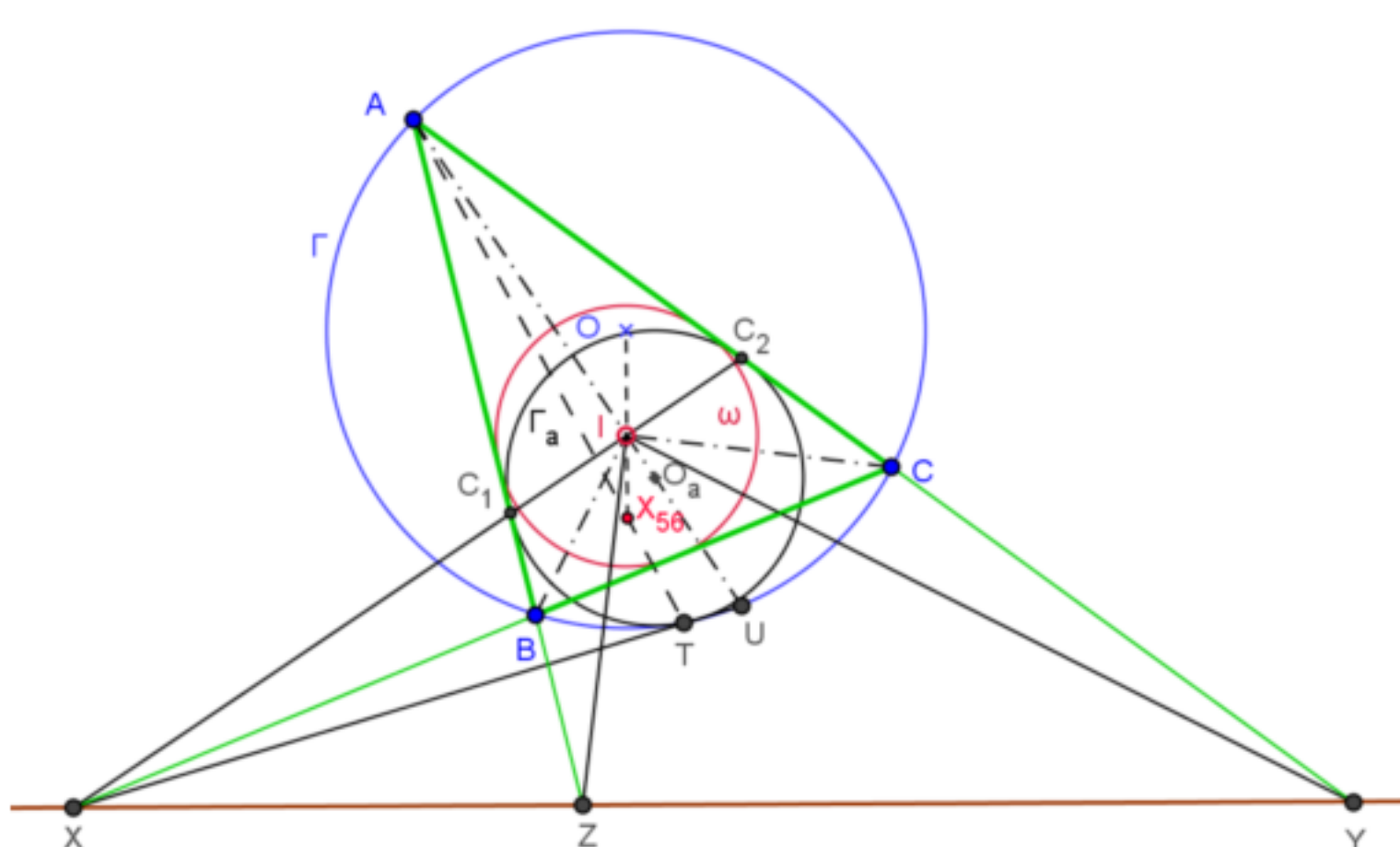
b) Sea  $U$  el punto de corte de la bisectriz del ángulo  $BAC$  con la circunferencia circunscrita, que coincide con el punto medio del arco  $BC$ . Tracemos la recta  $XU$ , que cortará de nuevo a la circunscrita en  $T$ . Demostrar que  $T$  es el punto de tangencia de la circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados  $AB, AC$  y también es tangente interior a la circunscrita.

c) Construyamos de manera análoga a  $X, Y$  sobre el lado  $AC$ , y  $Z$  sobre el lado  $BC$ .

Demostrar que  $X, Y, Z$  están alineados.

Barroso, R (2013): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



a) El teorema de Menelao aplicado al triángulo  $ABC$  con la transversal  $r = IX$  nos da la relación:

$$\frac{C_2A}{C_2C} \cdot \frac{XC}{XB} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1$$

En el problema 690 calculamos  $C_1A = C_2A = \frac{bc}{s}$ . Cancelando estos segmentos nos queda  $\frac{C_1B}{C_2C} \cdot \frac{CX}{BX} = 1$  de donde

$$\frac{CX}{BX} = \frac{C_2C}{C_1B} = \frac{b-AC_1}{c-AC_1} = \frac{b(s-c)}{c(s-b)}$$

A partir de aquí 
$$\frac{CX}{b(s-c)} = \frac{BX}{c(s-b)} = \frac{CX-BX}{b(s-c)-c(s-b)} = \frac{a}{s(b-c)}$$

De esta última se pueden obtener  $CX = \frac{ab(s-c)}{s(b-c)}$  y  $BX = \frac{ca(s-b)}{s(b-c)}$ .

b) La circunferencia tangente interiormente a la circunscrita  $\Gamma$  y a los lados  $AB$  y  $AC$  se conoce como  $A$ -circunferencia mixtilínea inscrita ( $A$ -mixtilinear incircle). Es conocido que sus puntos de contacto,  $C_1$  y  $C_2$ , con los lados del triángulo equidistan del incentro  $I$ , y al ser isósceles  $AC_1C_2$ , la bisectriz  $AI$  es perpendicular a  $C_1C_2$  (véase por ejemplo <http://ohkawa.cc.it-hiroshima.ac.jp/AoPS.pdf/euclideangeometrynotes-paul.pdf>). Por tanto la recta  $r = IX$  sirve para construirla: pasa por  $C_i$  y su centro es el punto de intersección de la bisectriz de  $A$  con la perpendicular a  $AC_i$  por  $C_i$ .

Para demostrar que  $T$  es el punto de tangencia de la  $A$ -circunferencia con  $\Gamma$ , observamos que, en general, si  $c_1, c_2$  y  $c_3$  son tres circunferencias cualesquiera, el producto de las dos homotecias que transforman sucesivamente  $c_1$  en  $c_2$  y  $c_2$  en  $c_3$  será una homotecia que transforma  $c_1$  en  $c_3$  y tendrá su centro alineado con los de aquellas.

Las tres circunferencias a que nos referimos aquí son la inscrita  $\omega$ , la  $A$ -circunferencia...  $\Gamma_a$  y  $\Gamma$ .

La homotecia de razón positiva que pasa de  $\Gamma$  a  $\omega$  tiene por centro el punto  $X_{56}$  de la enciclopedia *ETC* (la de razón negativa tiene centro  $X_{55}$ ). La que transforma  $\omega$  en  $\Gamma_a$ , el vértice  $A$ , donde concurren las tangentes comunes, también de razón positiva. Finalmente, la que pasa de  $\Gamma_a$  a  $\Gamma$  tiene por centro el punto de contacto de ambas, que vamos a llamar por ahora  $W$ . Estos tres puntos están alineados. Concluiremos esta parte demostrando que  $W = T$ .

Tomando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo  $ABC$ , demostraremos que el punto de intersección de las rectas definidas por  $A$  y  $X_{56}$  de una parte y  $X$  y  $U$  de otra, concurren en un punto de  $\Gamma$ .

Comenzaremos poniendo las ecuaciones o coordenadas de los diferentes objetos geométricos.

A partir de  $AC_1 = \frac{bc}{s}$  obtenemos  $C_1 = (s-b:b:0)$ ;  $C_2 = (s-c:c:0)$ .

(Es fácil comprobar que el punto medio del segmento que definen es el incentro  $I(a:b:c)$ ).

El punto  $X_{56} = \left(\frac{a^2}{s-a}; \frac{b^2}{s-b}; \frac{c^2}{s-c}\right)$

Circunferencia circunscrita  $\Gamma$ :  $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$

Bisectriz de  $A$ :  $cy = bz$ ; su intersección con la circunscrita es el punto  $U = \left(\frac{-a^2}{b+c}; b:c\right)$ .

Recta  $C_1C_2$ :  $x = \frac{s-b}{b}y + \frac{s-c}{c}z$ .

Esta recta corta al lado  $BC$  ( $x = 0$ ) del triángulo en el punto  $X = \left(0; \frac{b}{s-b}; \frac{-c}{s-c}\right)$ .

La recta  $XU$  tiene como ecuación 
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \frac{b}{s-b} & \frac{-c}{s-c} \\ -\frac{a^2}{b+c} & b & c \end{vmatrix} = 0$$
 que una vez desarrollado da:

$$r_{XU}: \frac{b+c}{a}x + \frac{s-b}{b}y + \frac{s-c}{c}z = 0$$

Para la recta  $AX_{56}$ : 
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{a^2}{s-a} & \frac{b^2}{s-b} & \frac{c^2}{s-c} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
, o bien,

$$r_{AX_{56}}: \frac{c^2}{s-c}y - \frac{b^2}{s-b}z = 0$$

El punto de intersección de estas dos rectas, resolviendo el sistema, es:

$$r_{AX_{56}} \cap r_{XU} = W = \left(-a; \frac{b^2}{s-b}; \frac{c^2}{s-c}\right).$$

Ahora se comprueba que  $W$  verifica la ecuación de la circunferencia circunscrita y con ello concluimos que es el punto  $T$  del enunciado y damos fin a esta parte.

$$a^2 \cdot \frac{b^2}{s-b} \cdot \frac{c^2}{s-c} - b^2 a \cdot \frac{c^2}{s-c} - c^2 a \frac{b^2}{s-b} = \frac{a^2 b^2 c^2 - (s-b)ab^2c^2 - ab^2c^2(s-c)}{(s-b)(s-c)} = \frac{ab^2c^2(a-s+b-s+c)}{(s-b)(s-c)} = 0.$$

c) El mismo razonamiento utilizado en a) nos sirve para concluir que

$$\frac{YA}{YC} = \frac{c(s-a)}{a(s-c)} \quad \text{y} \quad \frac{ZB}{ZA} = \frac{a(s-b)}{b(s-a)}.$$

Tenemos ahora

$$\frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{YA}{YC} \cdot \frac{XC}{XA} = \frac{a(s-b)}{b(s-a)} \cdot \frac{c(s-a)}{a(s-c)} \cdot \frac{b(s-c)}{c(s-b)} = 1.$$

Por tanto los puntos, en virtud del recíproco del teorema de Menelao, están alineados.

Nota.- Esta parte es un caso particular de una situación mucho más general, consecuencia del teorema del cuadrilátero de Desargues, que se expresa así: La condición necesaria y suficiente para que tres rectas  $l, m$  y  $n$  concurrentes en  $O$  corten a los lados  $BC, CA$  y  $AC$  de un triángulo  $ABC$  en puntos alineados  $L, M, N$  es que la homografía del haz  $O^*$  definida por

$$(OA, OB, OC) \rightarrow (l, m, n)$$

sea una involución.

El punto  $O$  es el incentro y la correspondencia que asocia a cada bisectriz su perpendicular por el incentro es, evidentemente, una involución. ■