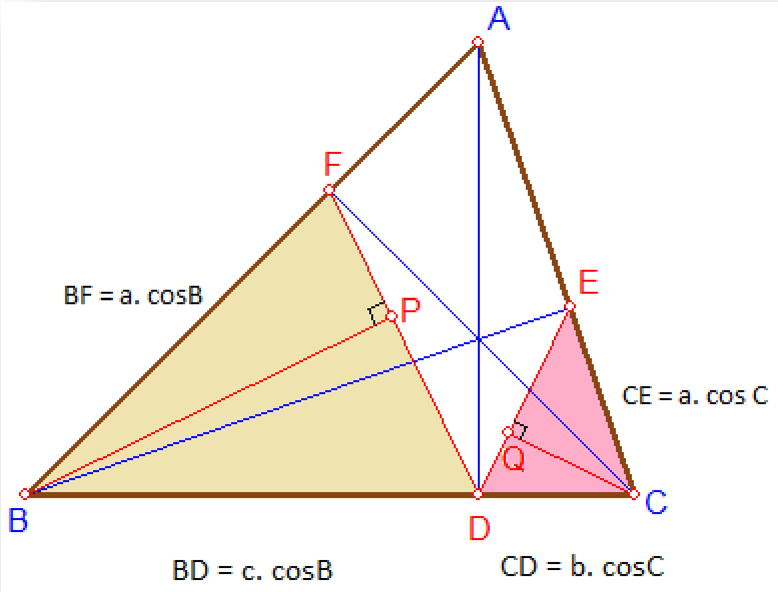
Problema 692.-
Sea ABC un triángulo. Sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C a las rectas BC, AC y AB. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde B y C a las rectas DF y DE.
Demostar que EQ=FP.

Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle. Pathways (Number two). Leeds. (p. 23)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

De la construcción realizada se observan los siguientes hechos de interés:



a) Los triángulos BFD y BCA son semejantes ya que comparten el mismo ángulo en el vértice B y se da la siguiente igualdad entre los lados que concurren en dicho vértice $\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC}$.

En efecto, $\frac{BD}{BE}=\frac{c.\cos B}{a.\cos B}=\frac{c}{a}=\frac{BA}{BC}$.

Por tanto, se verificará la siguiente igualdad entre ángulos $\measuredangle BFD=\measuredangle C$ y $\measuredangle BDF=\measuredangle A$.

De este modo, el segmento $FP=BF.\cos\measuredangle BFP=a.\cos B.\cos C$

b) De un modo similar, tenemos que los triángulos CED y CBA serán también semejantes. Por tanto, se verificará la siguiente igualdad entre ángulos $\measuredangle CED=\measuredangle B$ y $\measuredangle CDE=\measuredangle A$.

De este modo, el segmento $EQ=CE.\cos\measuredangle CED=a.\cos C.\cos B$

c) En definitiva, $FP=a.\cos B.\cos C=EQ$, c.q.d.