Problema 692

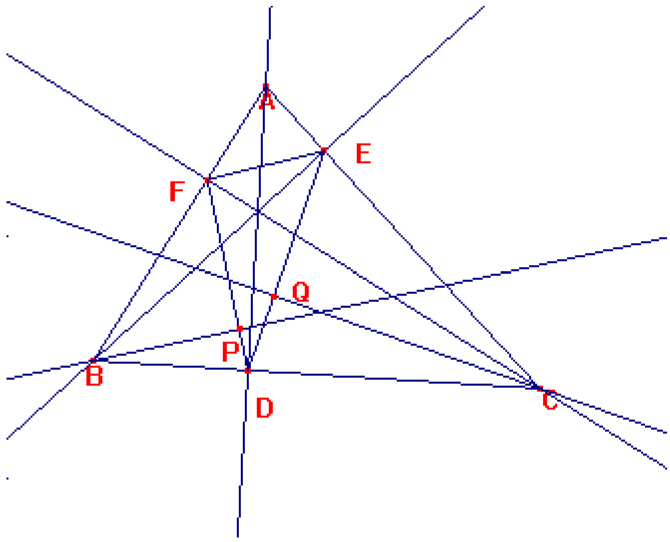
Ejercicio 2d.

6. Sea ABC un triángulo. Sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C a las rectas BC, AC y AB. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde B y C a las rectas DF y DE. Demostrar que EQ=FP.

Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle. Pathways (Number two). Leeds. (p. 23).

Solución del director.

a)Consideremos ABC acutángulo.



Es $AD^2 = c^2 - BD^2 = b^2 - (a - BD)^2$

Se tiene $BD = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Análogamente, $BF = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

Al ser los triángulos BFD y BCA semejantes, es $\frac{FD}{CA} = \frac{BD}{AB} = \frac{BF}{AC}$,

de donde $FD = \frac{CA\,BD}{AB} = \frac{b\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}}{c} = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$.

Por último, en el triángulo BDF, por cálculos similares, es:

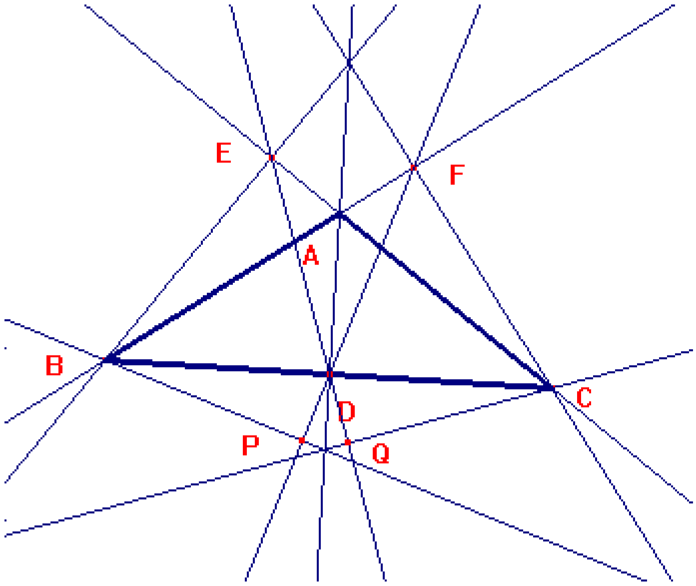
$$PF = \frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4abc}$$

Siendo los cálculos análogos para QE, se obtiene una expresión idéntica.

b) Si el triángulo ABC es rectángulo en A, es A=F=E, se tiene que D=P=Q, y lógicamente EP=FQ=AD.

c) Si el triángulo es rectángulo en B, E=D=B, y F está sobre AC, con <AFD=<CFD=90 luego Q=F, P=E, y así FQ=EP=0. Análogo si es rectángulo en C.

d) Si el triángulo es obtusángulo en A,



Los cálculos pertinentes nos conducen a ser:

$$PF = QE = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4abc}$$

Notas.-

1.- Si consideramos en el caso del acutángulo el punto R, análogo a P y Q, los segmentos DR , EP y FQ se cortan según Ceva en un punto T que es el punto de Nagel de DEF.

2.- Si observamos el triángulo de Kimberling 6,9,13 , en su ETC,

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

observamos que T es el punto 185.

Ricardo Barroso Campos.
Jubilado.
Sevilla. España