

Problema 692. Sea ABC un triángulo. Sean D , E y F los pies de las alturas desde A , B y C a las rectas BC , AC y AB . Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde B y C a las rectas DF y DE . Demostrar que $EQ = FP$.

Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle.

Soluzione di Ercole Suppa

Usiamo le notazioni classiche della geometria del triangolo: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$.

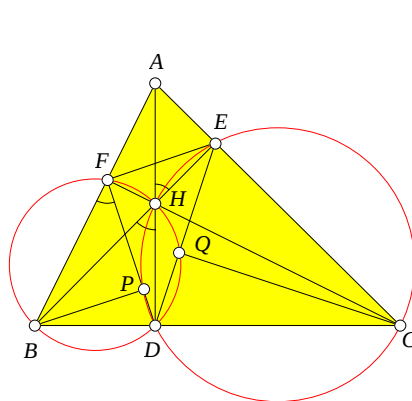


FIGURA 1

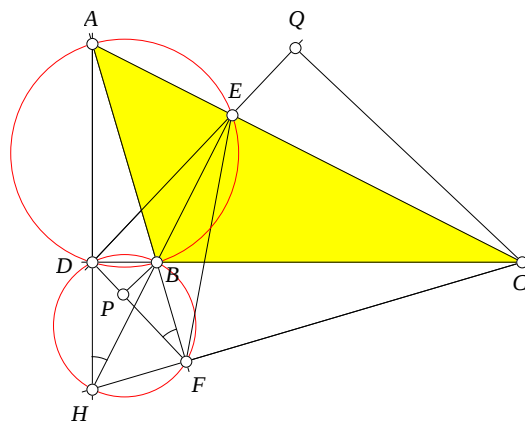


FIGURA 2

Distinguiamo tre casi:

- Se $\triangle ABC$ è acutangolo (FIGURA 1), dai quadrilateri ciclici $BDHF$ e $DCEH$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\angle BFP &= \angle BHD = \angle AHE = \gamma \Rightarrow \\ PF &= BF \cos \gamma = a \cos \beta \cos \gamma\end{aligned}$$

ed in modo analogo si dimostra che $EQ = a \cos \beta \cos \gamma$.

- Se $\angle ABC > 90^\circ$ (FIGURA 2), dal quadrilatero ciclico $DHFB$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\angle PFB &= \angle DHB = 90^\circ - \angle DBH = 90^\circ - \angle EBC = \gamma \Rightarrow \\ PF &= BF \cos \gamma = a \cos (180^\circ - \beta) \cos \gamma = a |\cos \beta| \cos \gamma\end{aligned}$$

mentre dal quadrilatero ciclico $ADBE$ abbiamo

$$\begin{aligned}\angle QEC &= \angle AED = \angle ABD = 180^\circ - \beta \Rightarrow \\ QE &= EC \cos (180^\circ - \beta) = a \cos \gamma |\cos \beta|\end{aligned}$$

(La dimostrazione del caso $\angle BCA > 90^\circ$ è analoga).

- Se $\angle BAC > 90^\circ$ (FIGURA 3) dal quadrilatero ciclico $BDFH$ abbiamo:

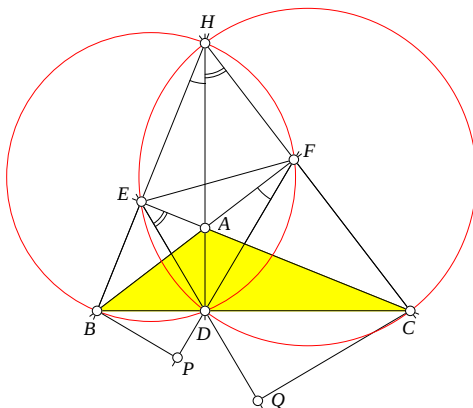


FIGURA 3

$$\begin{aligned}\angle PFB = \angle DHB = 90^\circ - \angle EAH = 90^\circ - \angle EBC = \gamma &\Rightarrow \\ PF = BF \cos \gamma = a \cos \beta \cos \gamma\end{aligned}$$

Analogamente dal quadrilatero ciclico $DCHE$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\angle QEB = \angle DHC = 90^\circ - \angle FAH = 90^\circ - \angle FCB = \beta &\Rightarrow \\ QE = CE \cos \beta = a \cos \gamma \cos \beta\end{aligned}$$

Dai tre casi esaminati possiamo concludere che $PF = QE = a |\cos \beta \cos \gamma|$. $\square$