Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo de altura AA'. Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen $AB' = AC'$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **693**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Sea ABC un triángulo de altura AA'. Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen AB'=AC'.*
>
> *Fraiwan, T., Hajja, M., (2011): Problem Q1012. Mathematics Magazine, Vol. 84, No. 3, p. 230.*

—— - ——

Con el fin de hacer algunas consideraciones posteriormente, relativas a la geometría del triángulo, vamos a hacer una resolución analítica, usando coordenadas baricéntricas homogéneas, referidas a un triángulo $\widehat{ABC}$.

Abordaremos el problema de una manera más general, reemplazando la altura a través el vértice A por una ceviana que pasa por un punto $Q(p : q : r)$. Por lo que consideramos el siguiente problema:

Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y Q un punto. Encontrar los puntos P sobre la ceviana AQ tales que si P_b y P_c son los pies de las cevianas BP y CP, respectivamente, se cumpla que $AP_b = AP_c$.

Los cuadrados de las distancias de A a P_b y a P_c son, respectivamente,

$$\frac{b^2w^2}{(u+w)^2}, \qquad \frac{c^2v^2}{(u+v)^2}.$$

Por lo que, $AP_b = AP_c$ si P está en una de las dos cónicas circunscritas a $\widehat{ABC}$ con centro en el punto medio de BC y tangentes en A a las bisectrices interior y exterior, de ecuaciones respectivas:

$$\mathcal{E} : cy(x+z) + bz(x+y) = 0, \qquad \mathcal{H} : cy(x+z) - bz(x+y) = 0.$$

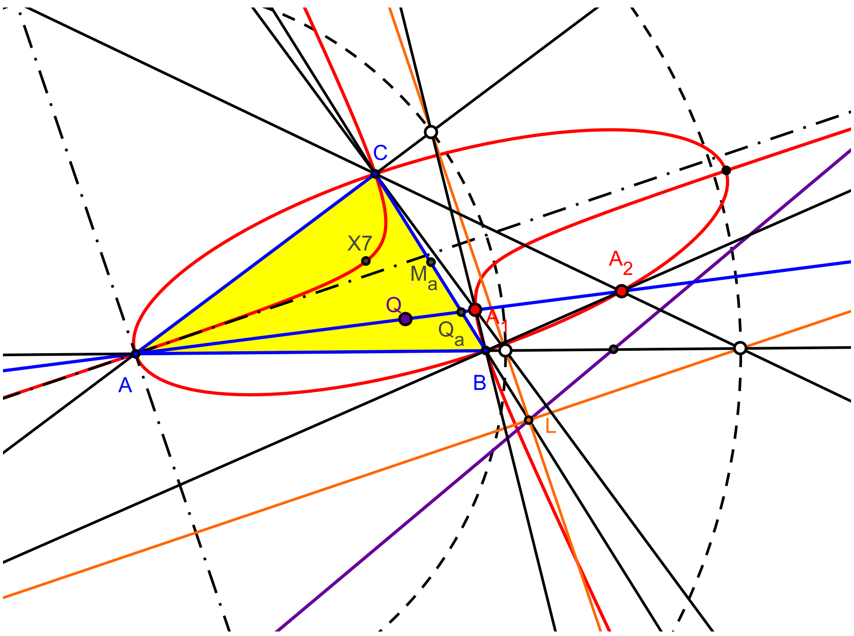
Así, las solución del problema planteado son los dos puntos A_1 y A_2: segundos puntos de intersección de la ceviana AQ con cada una de las cónicas consideradas:

$$A_1 = (-(b+c)qr : q(cq+br) : r(cq+br)), \quad A_2 = ((b-c)qr : q(cq-br) : r(cq-br)).$$

Si $Q = H$,ortocentro:

$$A_1 = (-a^4 + (b^2-c^2)^2 : (a+b-c)(a-b+c)(a^2+b^2-c^2) : (a+b-c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2))$$

$$A_2 = (a^4 - (b^2-c^2)^2 : (b+c-a)(a+b+c)(a^2+b^2-c^2) : (b+c-a)(a+b+c)(a^2-b^2+c^2))$$



Construcción geométrica de los puntos A_1 y A_2

Aparte de la construcción descrita anteriormente, ya que tales cónicas pueden ser construidas ($PPPt_P$ o $PPPt_P(2)$), podemos proceder como sigue:

Si Q_a es el pie de la ceviana AQ, sea L el conjugado armónico de Q_a respecto a B y C, es decir. L es el punto donde la tripolar de Q (respecto a ABC) corta a la recta BC.

La perpendicular por L a la bisectriz interior en A, corta a AB y AC en los pies de las cevianas BA_1 y CA_1.

La perpendicular por L a la bisectriz exterior en A, corta a AB y AC en los pies de las cevianas BA_2 y CA_2.

Nota adicional:

Si procedemos cíclicamente, se obtienen los puntos, cumpliendo propiedades similares, B_1 y B_2 en la ceviana BQ y, también, los puntos C_1 y C_2 en la ceviana CQ. Los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son claramente perspectivos con centro de perspectividad Q.

Como consecuencia del teorema de Desargues, los puntos $A_1B_1 \cap A_2B_2$, $B_1C_1 \cap B_2C_2$ y $C_1A_1 \cap C_2A_2$ están alineados en el eje de perspectividad.

Casos particulares del tripolo del eje de perspectividad de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$:

Bisectrices ($Q = I$ es el incentro de ABC):

$$(2a + b + c : a + 2b + c : a + b + 2c)$$

centro X_{1125} de la Enciclopedia de Kimberling (ETC), baricentro de $\{A, B, C, I\}$.

Alturas ($Q = H$ el ortocentro de ABC):

$$\left(\frac{1}{(a^2 - b^2 - c^2)(a^3 + a^2(b + c) - a(b^2 + c^2) - (b - c)^2(b + c))} : \cdots : \cdots\right).$$

centro del triángulo con número de búsqueda en ETC: 1.57873475989907956005509418З

Simedianas ($Q = K$ el simediano de ABC):

$$\left(\frac{a}{(a^2 - bc)(a^3(b^3 + c^3) - a^2b^2c^2 - b^3c^3)} : \cdots : \cdots\right)$$

centro del triángulo con número de búsqueda en ETC: 0.101948584519181417471636681 51.

Sirva esta aportación a TriangulosCabri como homeneje a José María Pedret.