Problema 693.-

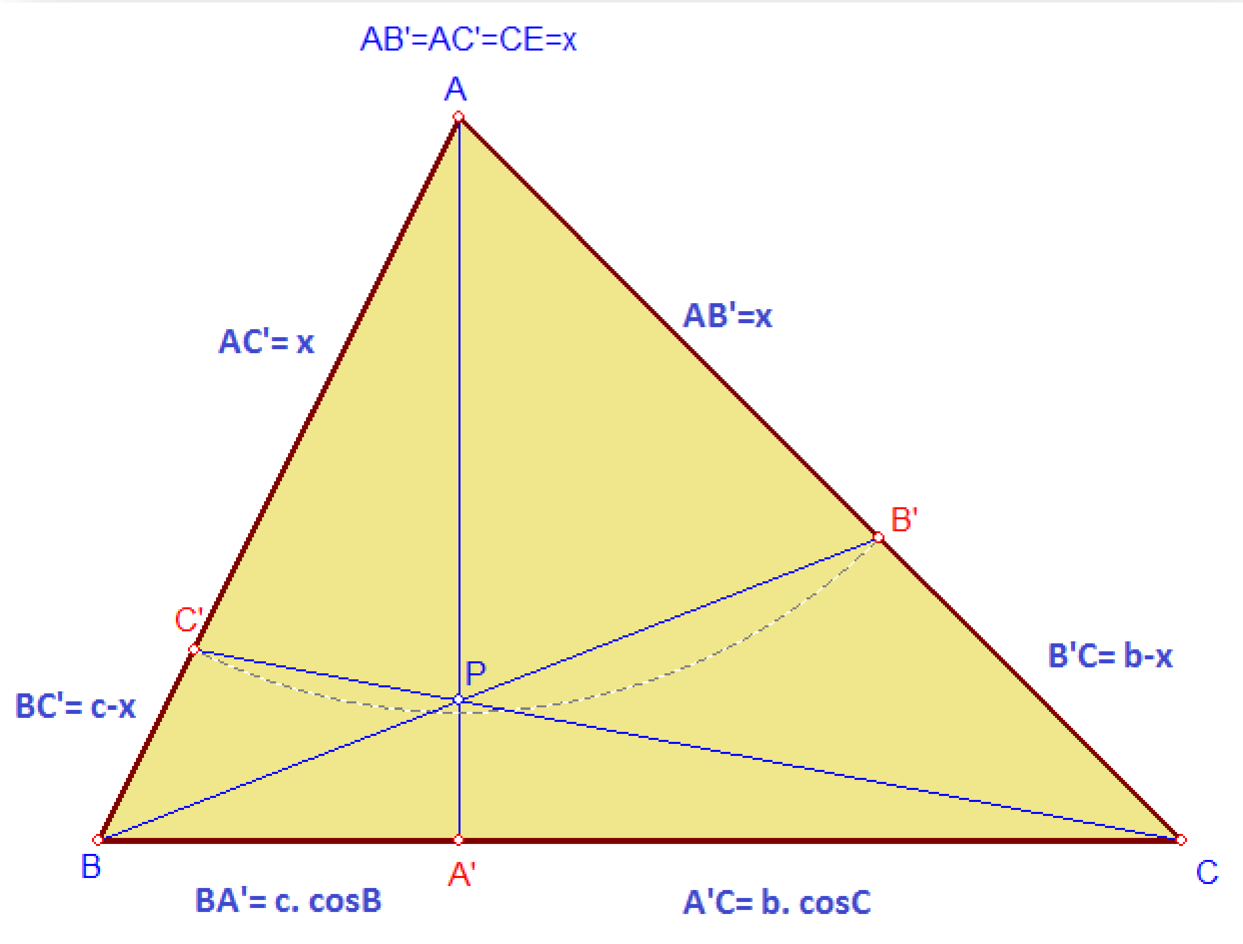
Sea ABC un triángulo de altura AA'. Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen AB'=AC'.

Fraiwan, T., Hajja, M., (2011): Problem Q1012. Mathematics Magazine, Vol. 84, No. 3, p. 230.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Homenaje *in memoriam* al maestro José María Pedret.

Suponemos en todo el desarrollo siguiente que $c \leq b$, lo cual no quita generalidad al problema.
De la construcción a realizar se deben observan los siguientes hechos de interés:



Por el teorema de Ceva, los segmentos interceptados por las cevianas correspondientes deben satisfacer la relación:

$$\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{AC'}{C'B}=1$$

Ahora bien, sustituyendo los segmentos dados por sus longitudes obtenemos la ecuación lineal:

$$\frac{c.\cos B}{b.\cos C}.\frac{b-x}{x}.\frac{x}{c-x}=1 \Rightarrow x=\frac{b.c.(\cos C-\cos B)}{b.\cos C-c.\cos B}$$

A continuación construimos el segmento AB'=AC'=x.
Para ello sigamos los siguientes pasos:

Paso 1.- Construimos el segmento $y = c.\cos C$.

Para ello, determinamos y como cuarta proporcional en la igualdad $\frac{y}{c} = \frac{b.\cos C}{b}$

Paso 2.- Construimos el segmento x=CE (=AB'=AC').

Para ello, determinamos x como cuarta proporcional en la igualdad $\frac{x}{b} = \frac{(y - c.\cos B)}{b.\cos C - c.\cos B}$