Problema 693

EXTRA DEDICADO IN MEMORIAM A José María Pedret.

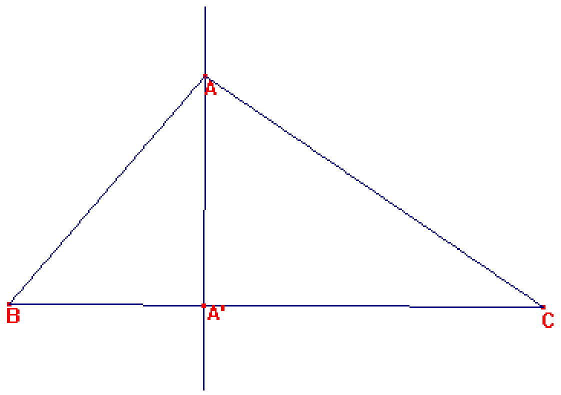
Sea ABC un triángulo de altura AA'. Demostrar que existe un punto sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen AB'=AC'.

Fraiwan, T., Hajja, M., (2011): Problem Q1012. Mathematics Magazine, Vol. 84, No. 3, p. 230.

Gracias, José María por tu amistad y tu visión de la Geometría.

Solución del director.

Sea ABC el triángulo (supongamos acutángulo).



Sea AA' =h.

Es $h^2 = b^2 - CA'^2 = c^2 - (a - CA')^2$

Así es $CA' = \frac{a^2-c^2+b^2}{2a}$, y $A'B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

Supongamos que AB'=q y AC'=q con B' sobre AB y C' sobre AC y con las cevianas AA' BB' y CC' coincidentes sobre P, un punto de AA'.

Por Ceva debería ser:

q (c-q) CA'= q(b-q) A'B.

es decir:$(c-q)\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = (b-q)\frac{a^2-c^2+b^2}{2a}$

O sea: $ca^2 + c^3 - cb^2 - qa^2 - qc^2 + qb^2 = ba^2 - bc^2 + b^3 - qa^2 + qc^2 - qb^2$

$$2q(b^2 - c^2) = b^3 - c^3 + bc(b-c) - a^2(b-c)$$

O sea :

$$q = \frac{(c+b)^2 - a^2}{2(b+c)}$$

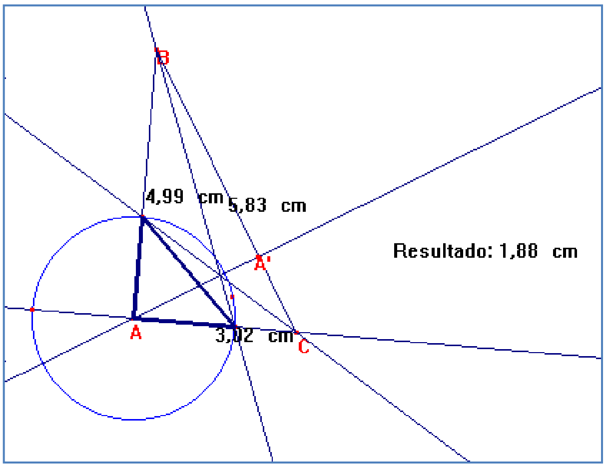
Así $BB' = c - q = \frac{(2bc+2c^2)-(c^2+2cb+b^2)+a^2}{2(b+c)} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2(b+c)}$

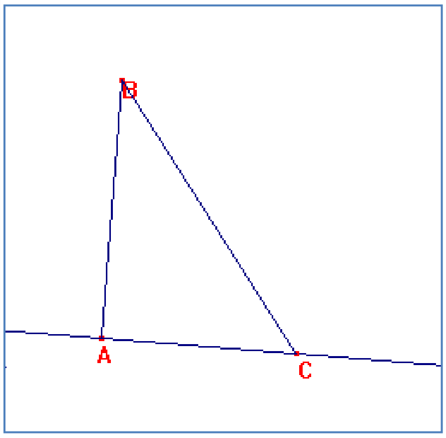
Este valor q siempre existe interior a AC y a AB en un acutángulo al ser a<b+c.

Si el triángulo es rectángulo, y A es de 90º, queda $q = \frac{(c+b)^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{c^2+2bc+b^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{bc}{b+c}$

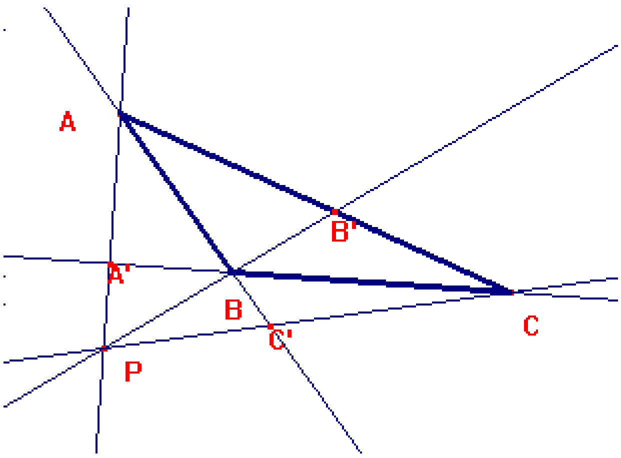
Si tomamos B o C, por ejemplo B, queda $q = \frac{(c+a)^2-b^2}{2(c+a)} = \frac{c^2+2ca+a^2-b^2}{2(c+a)} = \frac{2c^2+2ca}{2(c+a)} = c$

Es decir, en estos casos de los catetos, los triángulos isósceles degeneran en un lado.





Estudiemos el caso de un obtusángulo con el ángulo mayor de 90º en B.



Sea A'B=u. Es:$AA'^2 = c^2 - u^2 = b^2 - (a+u)^2$

O sea: $u = \frac{b^2-a^2-c^2}{2a}$

Supongamos que P cumple lo pedido.

Sea BC'=q; sería AC'=AB'=c+q, B'C=b-c-q, $BA' = \frac{b^2-a^2-c^2}{2a}$, $CA' = a + \frac{b^2-a^2-c^2}{2a} = \frac{b^2+a^2-c^2}{2a}$

Por Ceva ha de ser:

AB’ CA’ BC’ = B’C A’B C’A, es decir:

$$(c+q)\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)q=(b-c-q)\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{2a}\right)(c+q)$$

De donde, simplificando y despejando, queda:

$BC' = q = \frac{b^2-c^2-a^2}{2(b+c)}$.

Ricardo Barroso Campos.
Jubilado.
Sevilla. España.