

Problema 693. Sea ABC un triángulo de altura AA' . Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen $AB' = AC'$.

In Memoriam. A mi querido amigo José María Pedret. Requiescat in pace

Fraivan, T., Hajja, M., (2011): Problem Q1012. Mathematics Magazine, Vol. 84, No. 3, p. 230

Soluzione di Ercole Suppa

Usiamo le notazioni classiche della geometria del triangolo: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$.

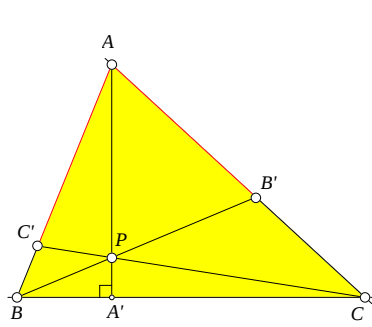


FIGURA 1

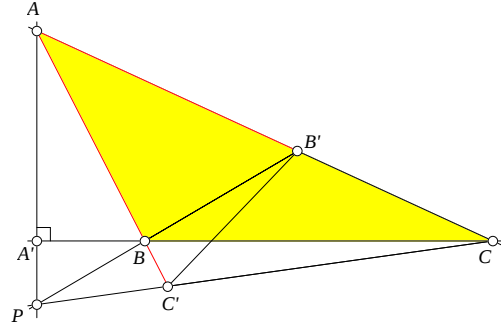


FIGURA 2

Prendiamo due punti $B' \in AC$, $C' \in AB$ tali che $AB' = AC' = x$ e sia $P = BB' \cap CC'$. Per il teorema di Ceva $P \in AA'$ se e solo se

$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = C'B \cdot A'C \cdot B'A \quad (1)$$

Distinguiamo due casi:

- (i) se $\beta \leq 90^\circ$ e $\gamma \leq 90^\circ$ (FIGURA 1) scegliamo B', C' interni ad AC, AB rispettivamente (ossia $x \leq b$ ed $x \leq c$). Essendo $BA' = c \cos \beta$ e $A'C = b \cdot \cos C$ la (1) è equivalente a

$$\begin{aligned} x \cdot c \cos \beta \cdot (b - x) &= (c - x) \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot x \Leftrightarrow \\ c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot (b - x) &= (c - x) \cdot b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow \\ 2(b^2 - c^2)x &= c \cdot (a^2 + b^2 - c^2) - b \cdot (a^2 + c^2 - b^2) \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{2} \left[b + c - \frac{a^2}{b + c} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Osserviamo che:

- $x > 0$ in quanto $a < b + c$;
- $x \leq b$ in quanto $c^2 \leq a^2 + b^2$, essendo $\cos \gamma \geq 0$;
- $x \leq c$ in quanto $b^2 \leq a^2 + c^2$, essendo $\cos \beta \geq 0$;

(ii) se $\beta > 90^\circ$ (FIGURA 2)¹ scegliamo B' interno ad AC e C' esterno ad AB . Essendo $BA' = -c \cos \beta$ e $A'C = b \cdot \cos C$ la (1) è equivalente a

$$\begin{aligned} x \cdot (-c \cos \beta) \cdot (b - x) &= (x - c) \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot x \Leftrightarrow \\ c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot (b - x) &= (c - x) \cdot b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{2} \left[b + c - \frac{a^2}{b + c} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Osserviamo che:

- $x > 0$ in quanto $a < b + c$;
- $x \geq b$ in quanto $c^2 < a^2 + b^2$, essendo $\cos \gamma \geq 0$;
- $x < c$ in quanto $b^2 > a^2 + c^2$, essendo $\cos \beta \leq 0$;

I segmenti AC' , AB' di lunghezza x sono facilmente costruibili con riga e compasso. Il punto P che verifica la condizione richiesta è $P = AC' \cap AB'$. $\square$

Seconda soluzione, con coordinate baricentriche omogenee.

Nello svolgimento dei calcoli abbiamo usato MATHEMATICA ed il pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán².

Sul segmento AA' di estremi $A(1 : 0 : 0)$ e $A'(0 : a^2 + b^2 - c^2 : a^2 - b^2 + c^2)$ scegliamo un punto P tale che $AP/PA' = t$. Si trova che

$$\begin{aligned} P &(2a^2 : (a^2 + b^2 - c^2)t : (a^2 - b^2 + c^2)t) \\ B' &(-2a^2 : 0 : -(a^2 - b^2 + c^2)t) \\ C' &(-2a^2 : -(a^2 + b^2 - c^2)t : 0) \end{aligned} \quad (3)$$

Imponendo che $AB' = AC'$ si perviene all'equazione $f(t)g(t) = 0$, dove:

$$\begin{aligned} f(t) &= -2a^4 + 2a^2b^2 - 4a^2bc + 2a^2c^2 - a^4t + b^4t - 2b^2c^2t + c^4t \\ g(t) &= -2a^4 + 2a^2b^2 + 4a^2bc + 2a^2c^2 - a^4t + b^4t - 2b^2c^2t + c^4t \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a t le equazioni $f(t) = 0$, $g(t) = 0$ e sostituendo i valori trovati nella (3) si ottengono i seguenti punti

$$\begin{aligned} P_1 &(abc \cos \beta \cos \gamma : 2bs(s - a) \cos \gamma : 2cs(s - a) \cos \beta) \\ P_2 &(-abc \cos \beta \cos \gamma : 2b(s - b)(s - c) \cos \gamma : 2c(s - b)(s - c) \cos \beta) \end{aligned}$$

dove $s = (a + b + c)/2$. $\square$

¹Il caso $\gamma > 90^\circ$ è analogo.

²<http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/>